

Les fondements de la turbulence

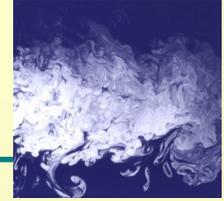
Phénoménologie et modélisation de la
turbulence au sein d'un écoulement de fluide
incompressible

Damien VIOLEAU
Chercheur Expert – EDF R&D

Ecole Nationale des Ponts et Chaussées



Cours sur la turbulence



Objectif du cours

- Présenter et expliquer les phénomènes
- Démontrer les équations fondamentales
- Donner des outils simples d'expertise
- Justifier et éclaircir les modèles numériques

Plan sommaire

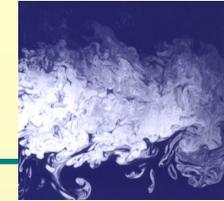
- Phénoménologie de la turbulence
- Modèle de Reynolds – Modèle de Boussinesq
- Vision de Kolmogorov et fermeture des équations

***Première partie :
Phénoménologie de
la turbulence***

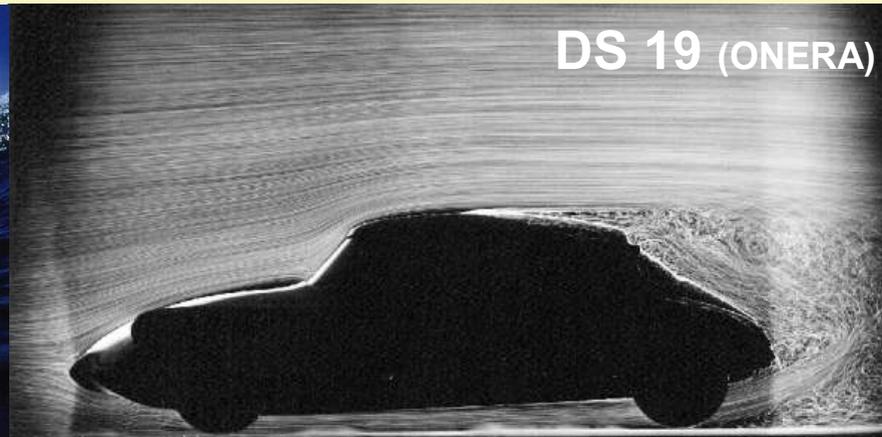


O. Reynolds

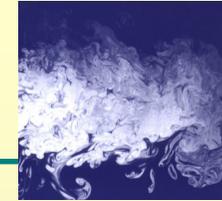
Contexte (1)



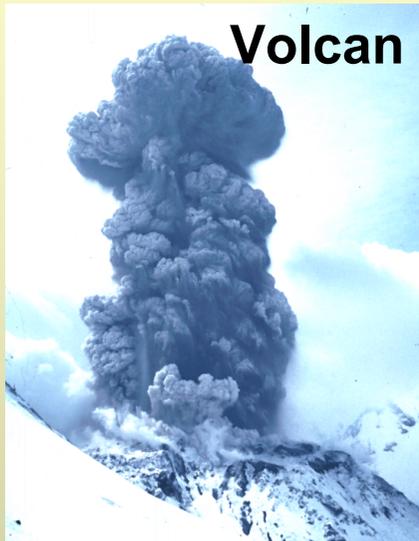
Complexité, variété...



Contexte (2)



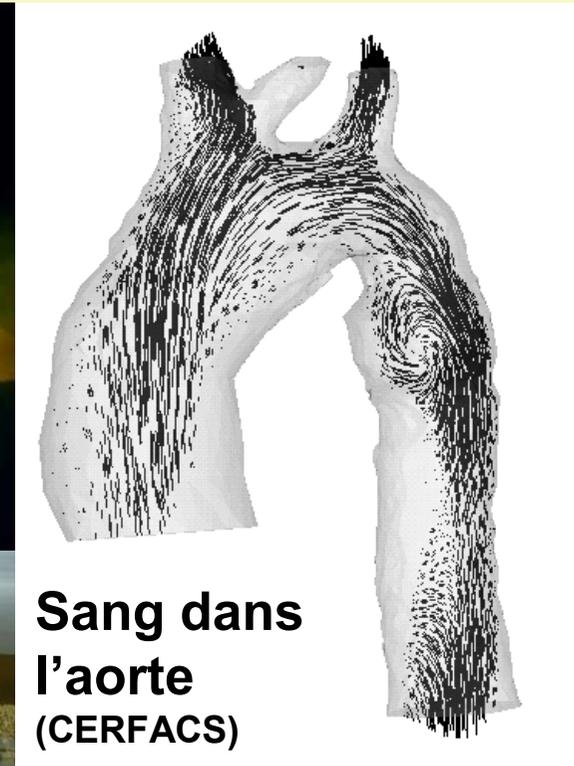
... et *beauté* des écoulements !



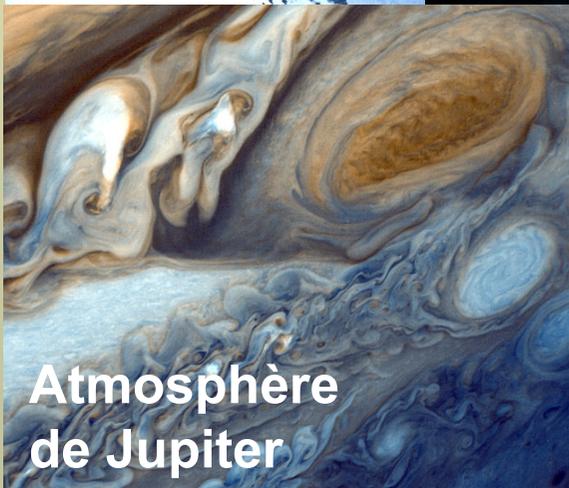
Volcan



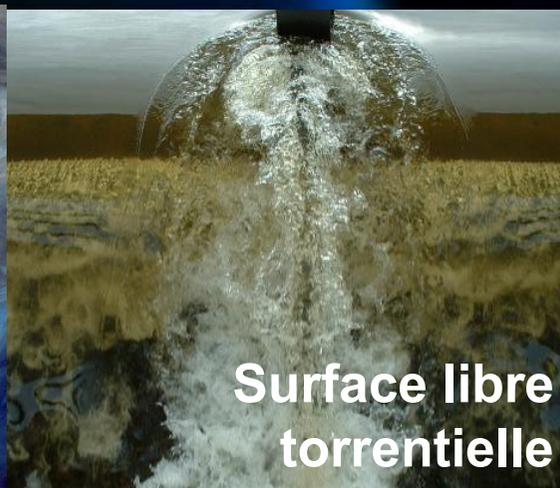
Avion militaire



Sang dans l'aorte (CERFACS)



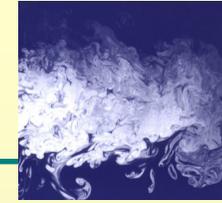
Atmosphère de Jupiter



Surface libre torrentielle

... D'où vient une telle complexité ?

Rappel des équations (1)



Equations de Navier-Stokes

Dans le cas d'un écoulement incompressible :

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad \underline{u}_{bord} = \underline{U}_{paroi}$$

$$\forall i, \frac{\partial u_i}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j}_{Convection} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \underbrace{\nu \Delta u_i}_{Diffusion}$$

$$\left(\rho \nu \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{air} = \left(\rho \nu \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{eau}$$

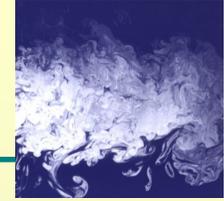
- Le terme visqueux... **diffuse** la quantité de mouvement
dissipe l'énergie

- Le taux de dissipation est $e = \nu s^2 = 2\nu s_{ij} s_{ij}$ où $s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

- Le rapport convection / diffusion est donné par
le *nombre de Reynolds*

$$Re = \frac{UD}{\nu} \sim \frac{Convection}{Diffusion}$$

Rappel des équations (2)



Sous forme développée

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

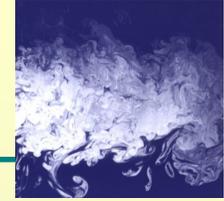
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} u + \frac{\partial v}{\partial y} v + \frac{\partial v}{\partial z} w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} u + \frac{\partial w}{\partial y} v + \frac{\partial w}{\partial z} w = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

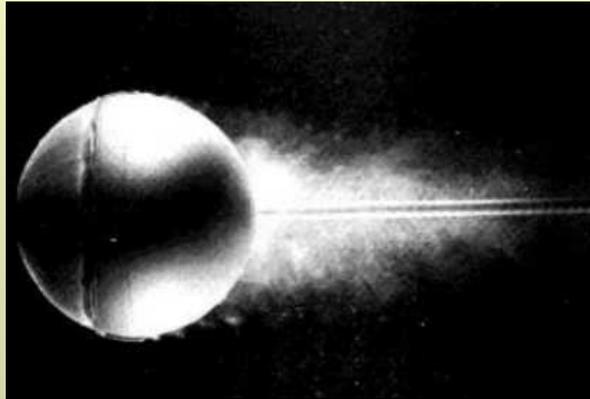
... soit 4 équations pour 4 inconnues : u , v , w et p , dépendant toutes de l'espace x , y , z et du temps t .

Le problème de la turbulence

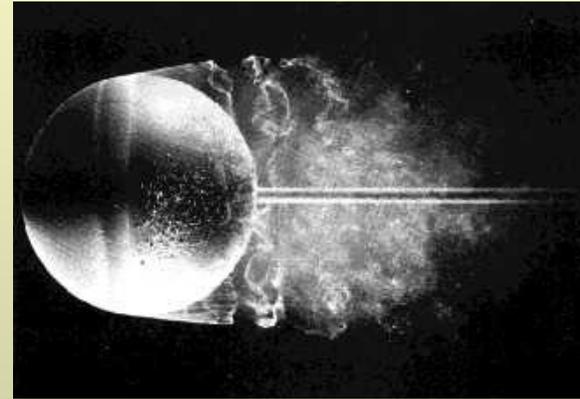


Énoncé du problème

Les équations de Navier-Stokes sont *non linéaires*, ce qui donne lieu à des solutions très complexes, parfois laminaires, souvent turbulentes :



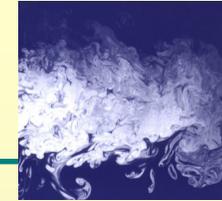
Laminaire



Turbulent

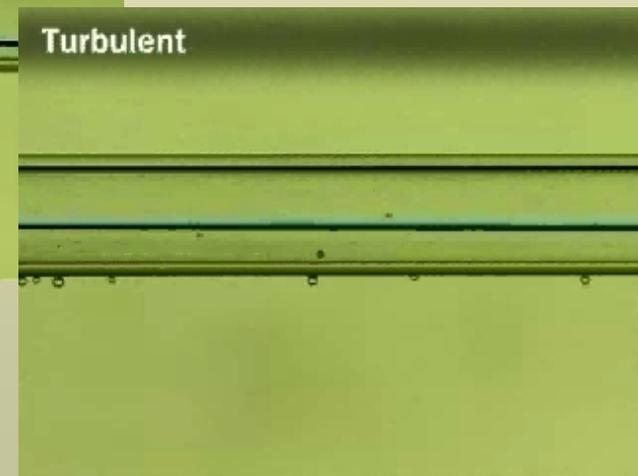
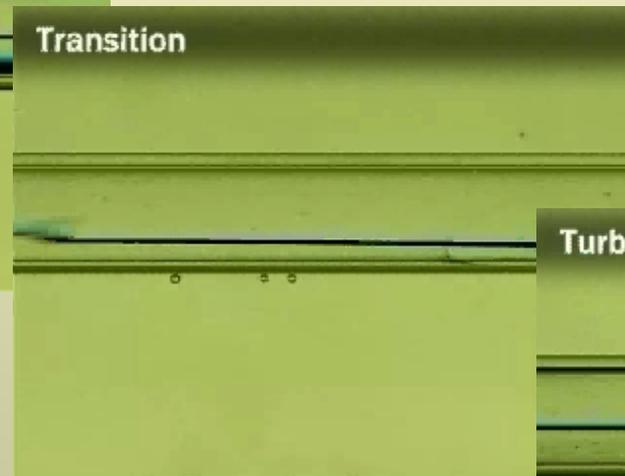
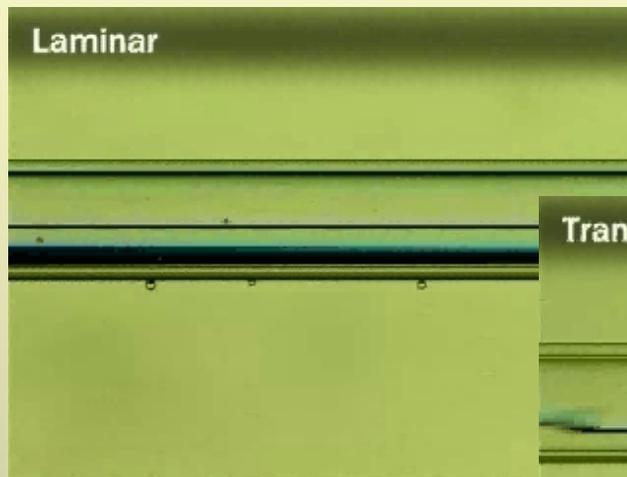
- Pourquoi cette distinction (comment et pourquoi apparaît la turbulence) ?
- Comment traiter des solutions géométriquement si complexes ?
- Quels sont les phénomènes mis en jeu ?

L'expérience de Reynolds (1)



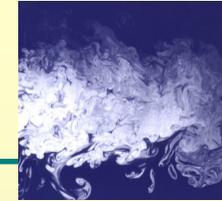
Jet permanent dans un fluide au repos

En 1883, Osborne Reynolds réalise l'expérience suivante :



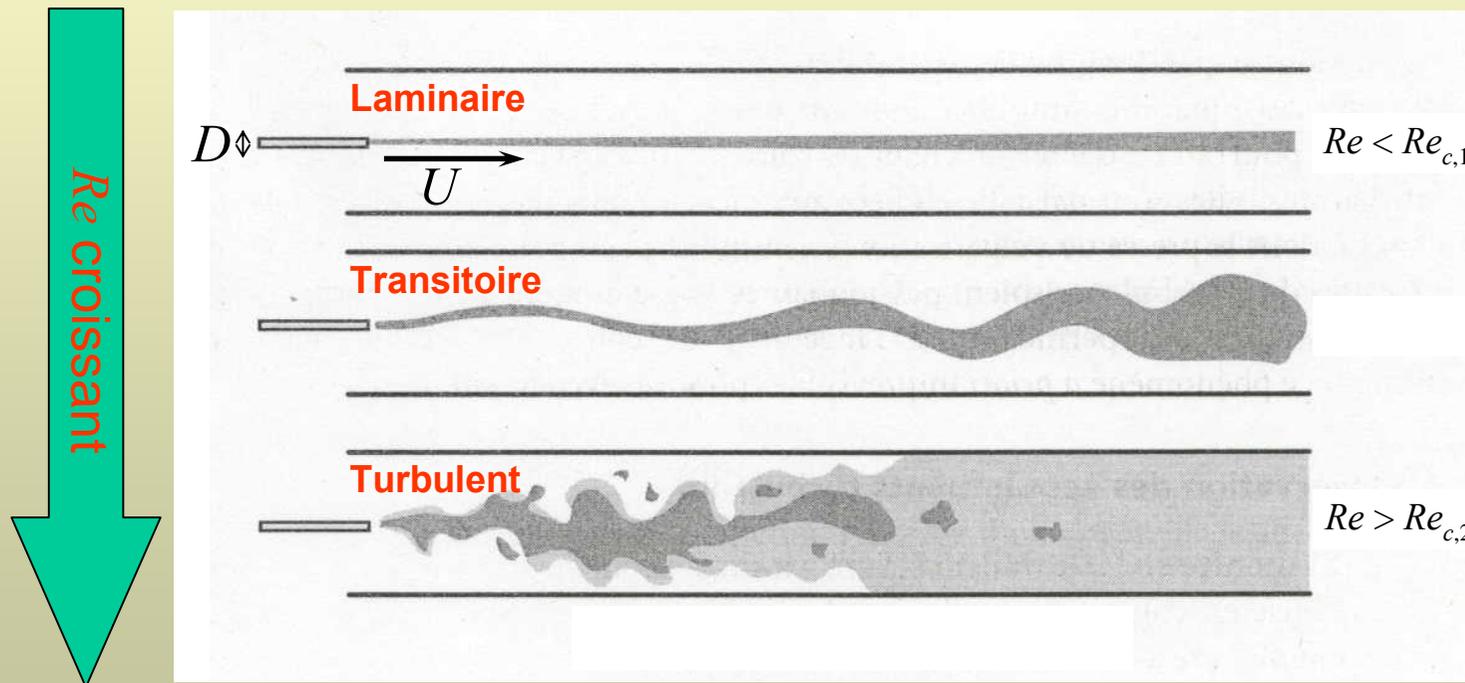
O. Reynolds

L'expérience de Reynolds (2)



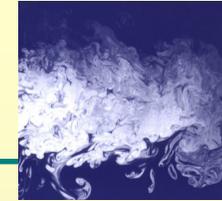
Résumé

Suivant la valeur du nombre de Reynolds $Re = UD / \nu$, l'écoulement adopte des comportements radicalement différents.



→ Il paraît logique qu'un écoulement plus visqueux soit plus stable.

Régime périodique (instabilité)



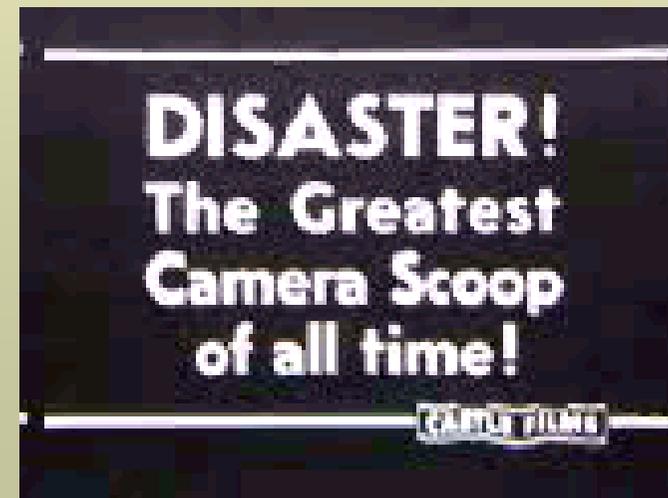
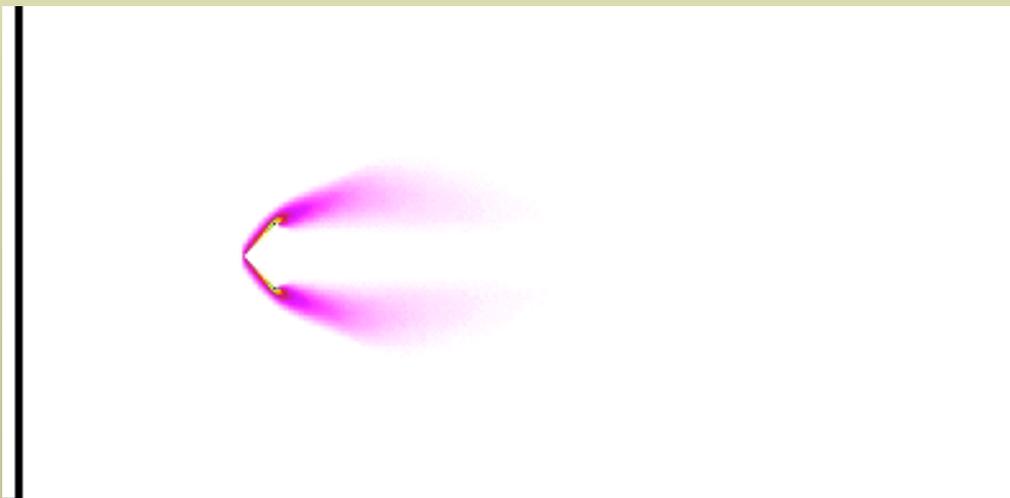
Naissance d'une instabilité

Tant que $Re < Re_{c,1}$, l'écoulement demeure laminaire.

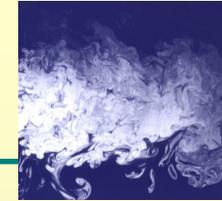
Lorsque la valeur critique $Re_{c,1}$ est atteinte, une instabilité naît :

- Première rupture de la symétrie spatiale
- Ecoulement non permanent
- Maintien d'une régularité géométrique

Pour l'expérience de Reynolds, $Re_{c,1} \cong 2100$.



Régime chaotique (turbulence)



Apparition de la complexité

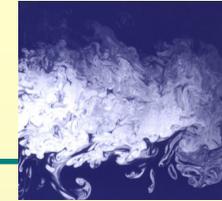
Lorsque Re atteint un second seuil critique $Re_{c,2}$, la turbulence naît :

- Rupture complète de la symétrie spatiale (localement)
- Naissance d'une grande complexité structurelle (tourbillons)
- Apparition d'un nouvel ordre *global* (à grande échelle)

Pour l'expérience de Reynolds, $Re_{c,2} \cong 3000$.



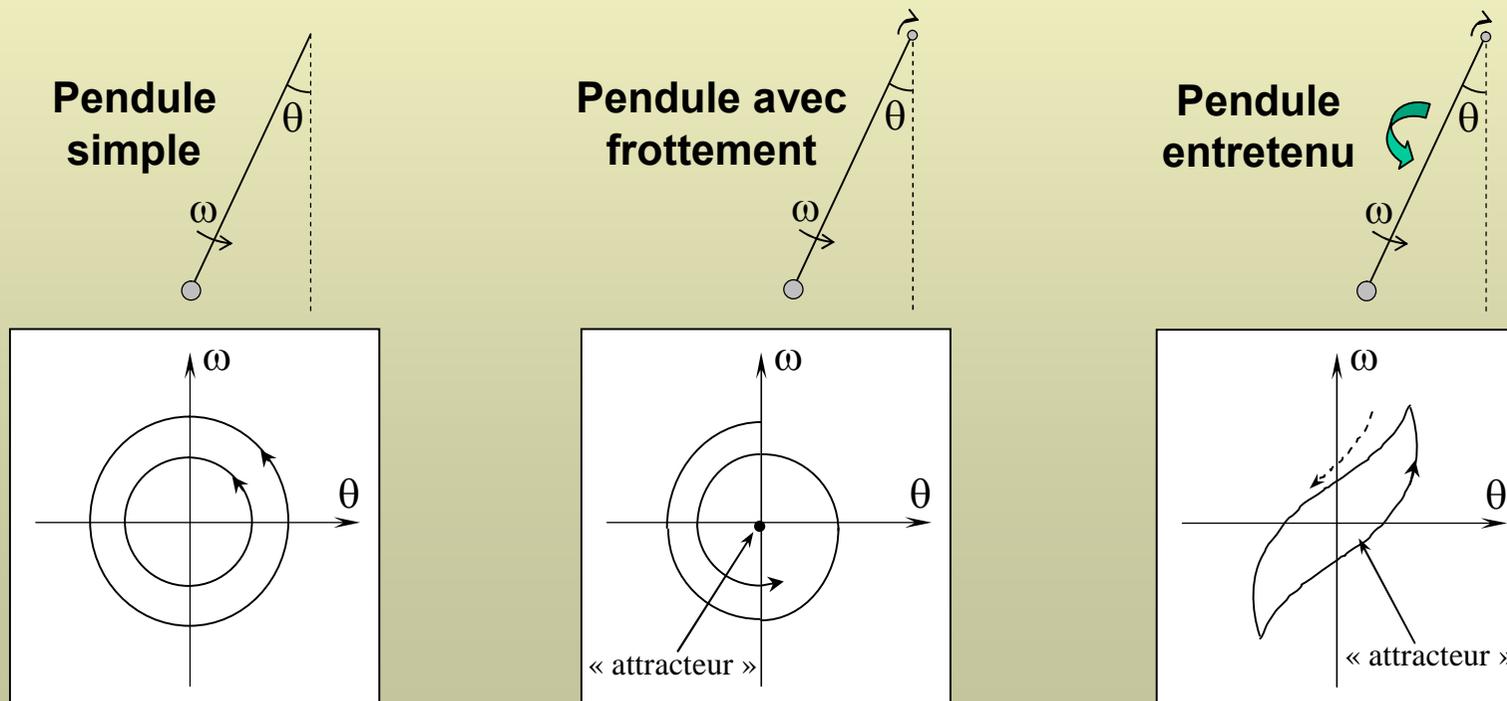
Systemes dynamiques



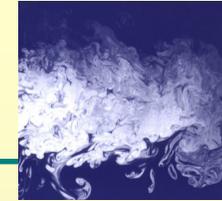
Notion d'espace des phases

Un systeme dynamique caracterise par n parametres physiques independants peut etre decrit par un point d'un espace a n dimensions.

Cas d'un pendule ($n = 2$)



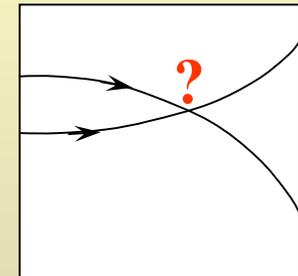
Notion d'attracteur



Portrait des phases

Dans l'espace des phases :

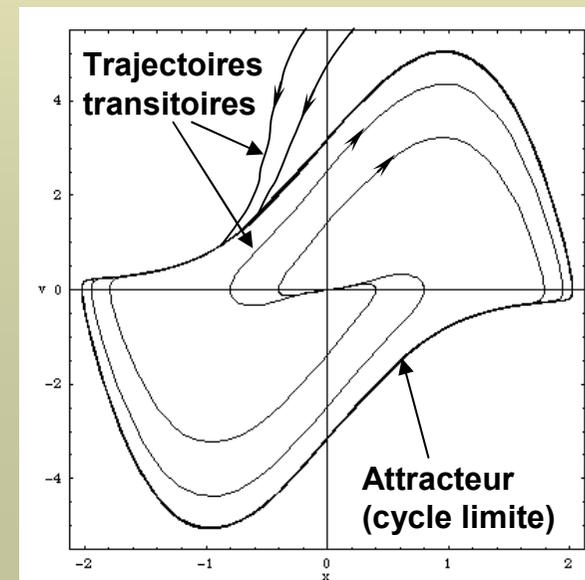
- Un point représente l'état du système à un instant donné
- Une courbe (trajectoire des phases) représente l'évolution du système au cours du temps
- Deux trajectoires peuvent se rapprocher asymptotiquement mais jamais se croiser (déterminisme)



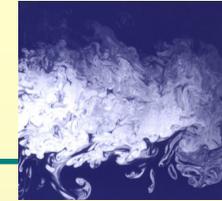
Cas de l'oscillateur de Van der Pol

Il s'agit d'un oscillateur entretenu et dissipatif.

- Les trajectoires convergent vers un cycle limite (attracteur de dimension 1)
- L'apport d'énergie permet l'existence d'un attracteur non réduit à un point
- La dissipation d'énergie induit un *oubli des conditions initiales* (irréversibilité)



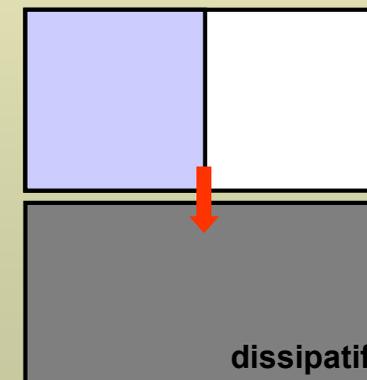
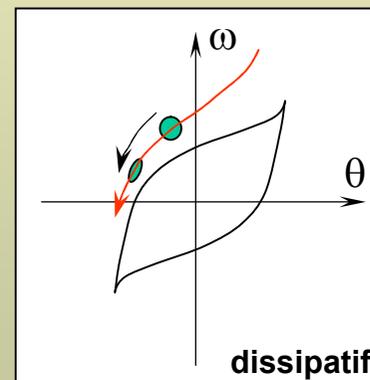
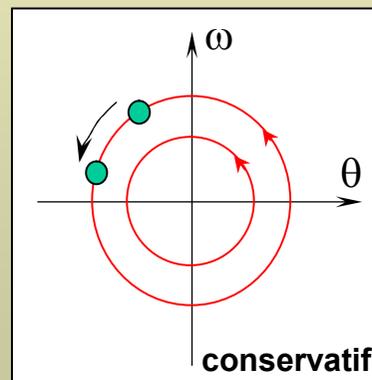
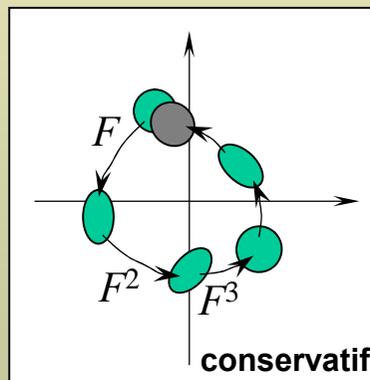
Réduction des volumes



Théorème de Liouville

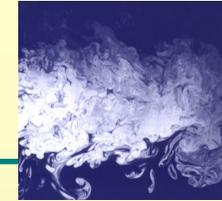
Les fondements mathématiques de la mécanique Hamiltonienne permettent de montrer que :

- Sans dissipation d'énergie, il y a *conservation* des volumes dans l'espace des phases (théorème de Liouville)
- Un terme dissipatif tend au contraire à y *réduire* les volumes au cours du temps (irréversibilité)



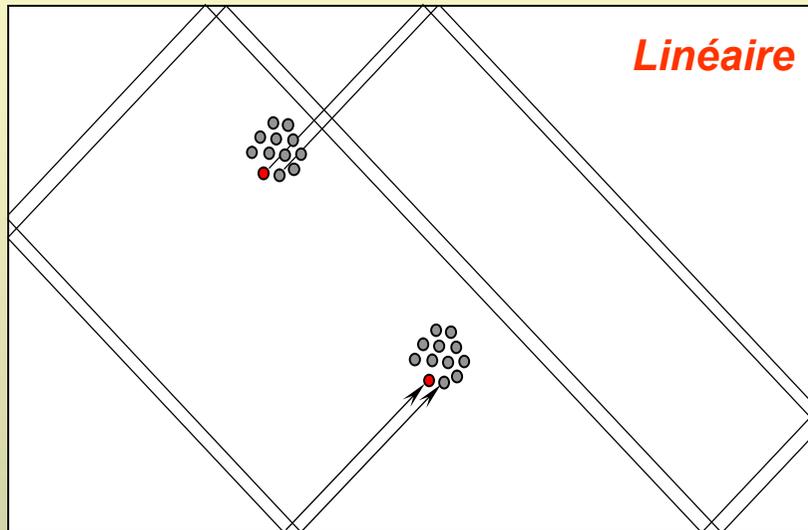
➔ Conséquence : la dimension de l'attracteur est strictement inférieure à celle de l'espace des phases

Sensibilité aux conditions initiales

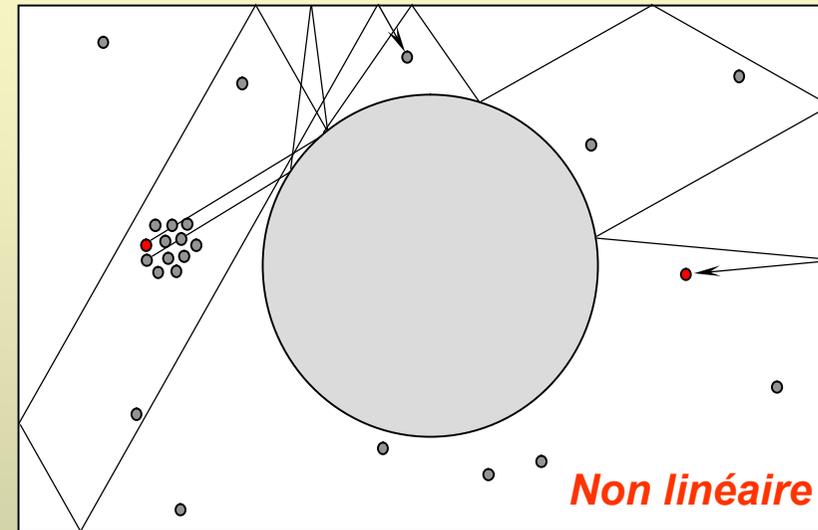


Cas d'un faisceau de boules sur des billards

Billard classique



Billard avec obstacle circulaire

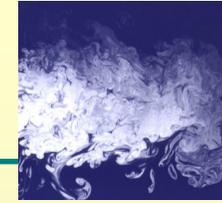


Conclusions

Les *non-linéarités* induisent une sensibilité aux conditions initiales, avec :

- **diffusion** de l'information
- **dissipation** de l'énergie : augmentation de l'entropie + irréversibilité
⇒ *chaos* (désordre, imprédictibilité)

Notion de chaos



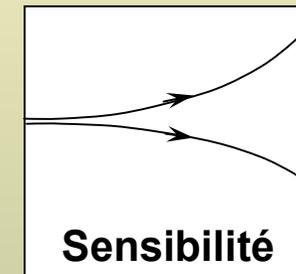
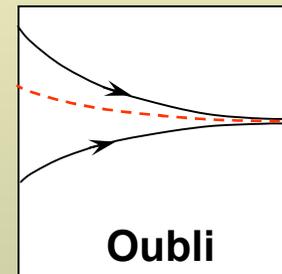
Premier paradoxe

En conclusion de ce qui précède :

- La dissipation d'énergie induit un *oubli* des conditions initiales
- Un terme non linéaire induit une *sensibilité* aux conditions initiales, responsable d'une dissipation d'énergie (apparition du désordre)

→ Oubli des C.I. et sensibilité aux C.I. peuvent-ils vraiment coexister ?

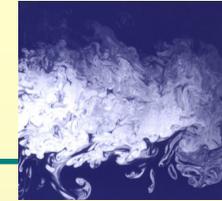
Elément de réponse : il faut pour cela un régime **chaotique**, c'est-à-dire extrêmement désordonné, muni d'un attracteur très complexe.



→ A quoi ressemble ce genre d'attracteur ? Quelles sont ses propriétés géométriques ?

→ Combien de degrés de libertés caractérisent un système chaotique ?

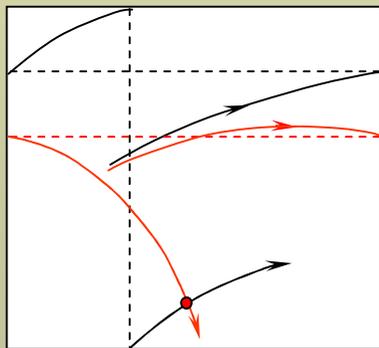
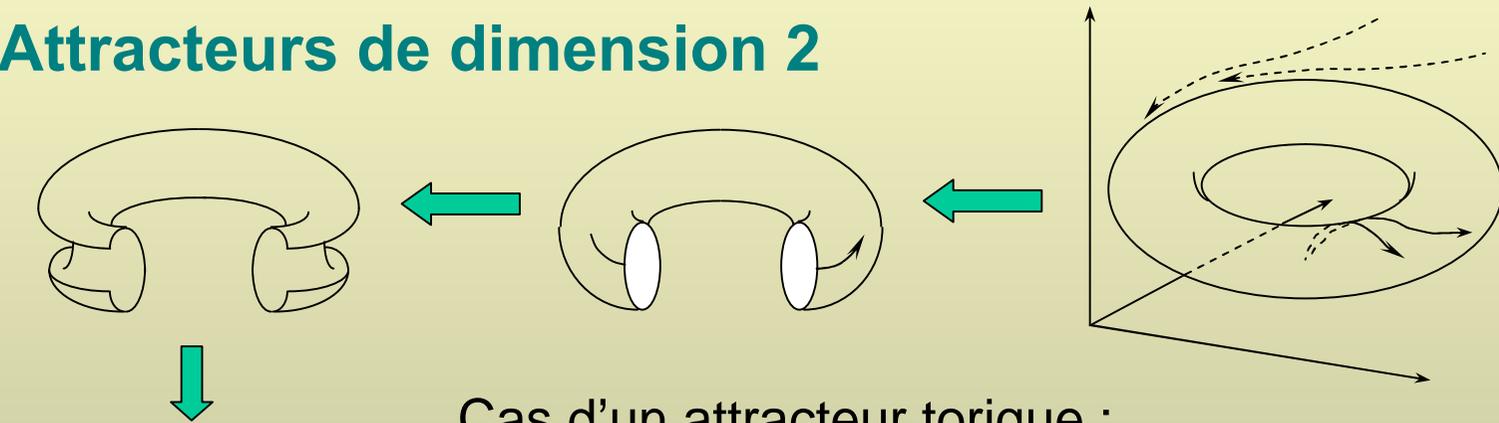
Dimension d'un attracteur



« Period three implies chaos » (1978)

D. Ruelle et F. Takens ont montré que 3 paramètres suffisent à faire naître un régime chaotique → l'attracteur doit être de dimension < 3

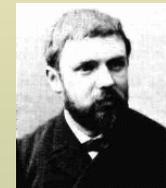
Attracteurs de dimension 2



Cas d'un attracteur torique :

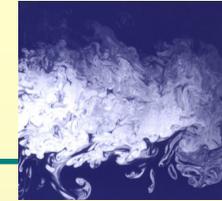
- on déplie le tore sur un plan
- par périodicité, deux trajectoires des phases divergentes finissent par se couper

→ La sensibilité aux C.I. requiert un attracteur de dimension supérieure à 2 !



H. Poincaré

Les objets fractals

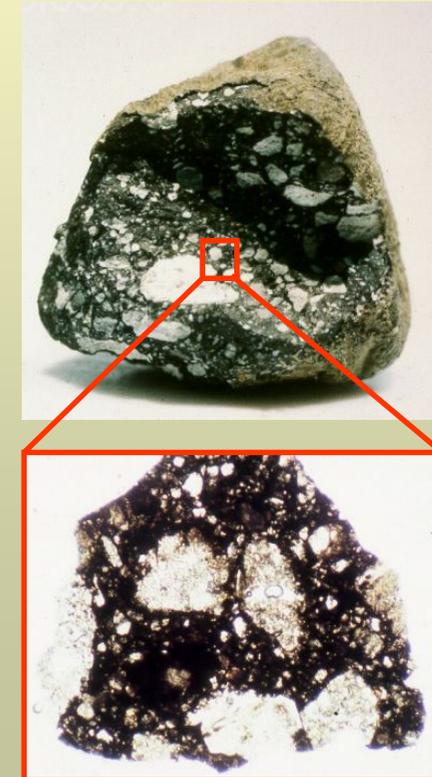
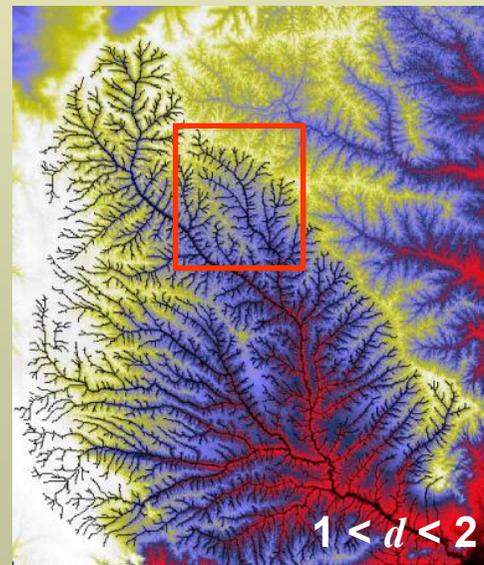
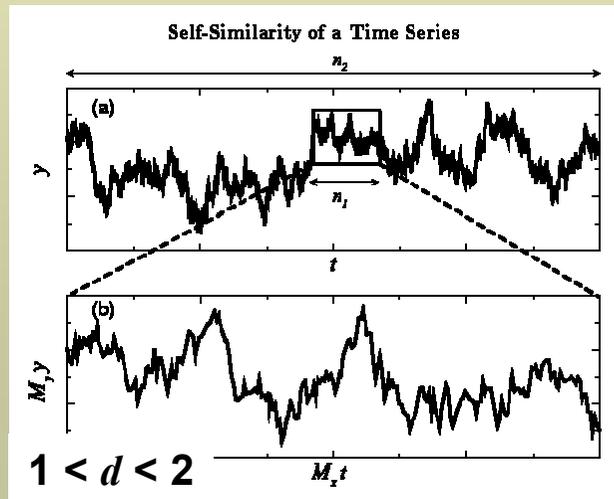


Définition et propriétés

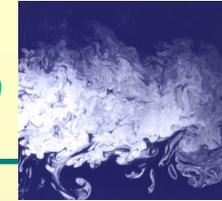
Dans les années 60-70, des mathématiciens, physiciens, biologistes, chimistes, etc. ont mis en évidence l'existence d'objets dont la dimension géométrique n'est pas un entier : les objets fractals.

Ces objets présentent :

- Une auto-similarité (invariance d'échelle)
- Une grande complexité



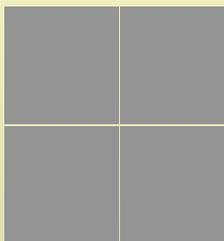
Dimension de Hausdorff-Besicovitch

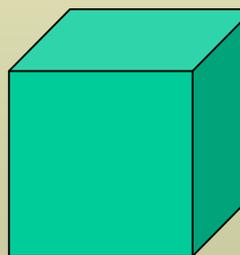
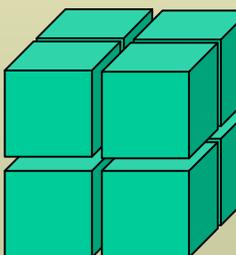


Division d'un objet en sous-ensembles

Cas d'un n -cube :

  $N = 2 = 2^1$

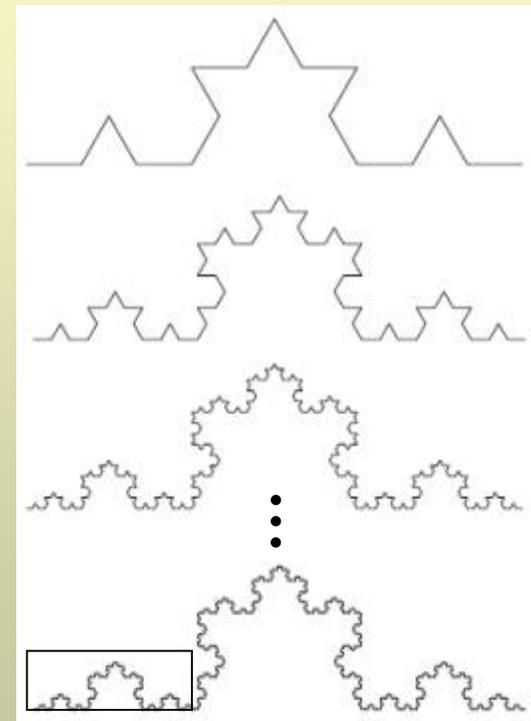
  $N = 4 = 2^2$

  $N = 8 = 2^3$

Conclusion : la dimension d vérifie

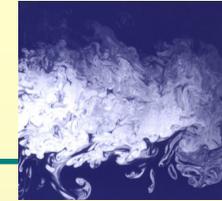
$$N = k^d \quad \Rightarrow \quad d = \log_k N$$

Cas du flocon de Von Koch :



$$4 = 3^d \\ \Rightarrow d = \log_3 4 \approx 1,26$$

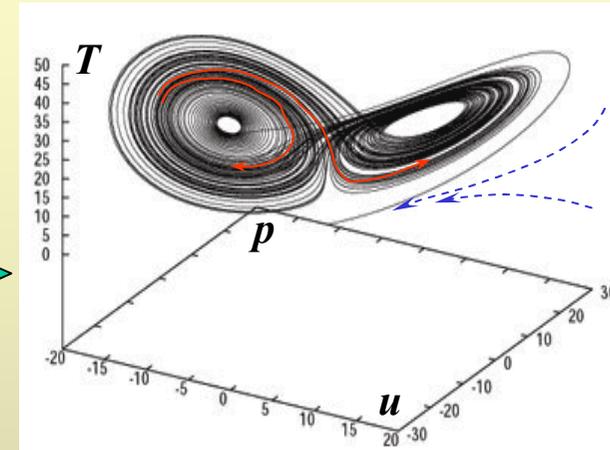
Attracteurs étranges



Exemple : l'attracteur de Lorenz

L'attracteur d'un système chaotique est donc *fractal* (dimension non entière : $2 < d < 3$)

Le premier fut obtenu en 1961 par E. Lorenz à l'aide d'un modèle météo très simplifié →



Structure d'un attracteur étrange

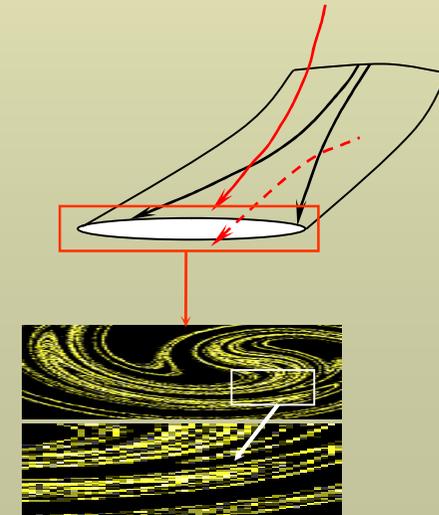
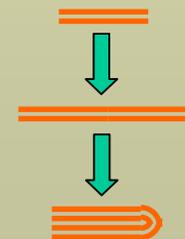
Avec un tel attracteur, peuvent coexister :

- oubli des conditions initiales (hors de l'attracteur)
- sensibilité aux conditions initiales (sur l'attracteur)

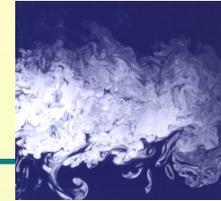
Cela résulte d'un équilibre énergétique entre :

- dissipation (irréversibilité)
- production (mouvement entretenu)

La structure est *feuilletée* (autosimilarité) grâce à un étirement-repli (mélange)



Evolution dans l'espace des phases

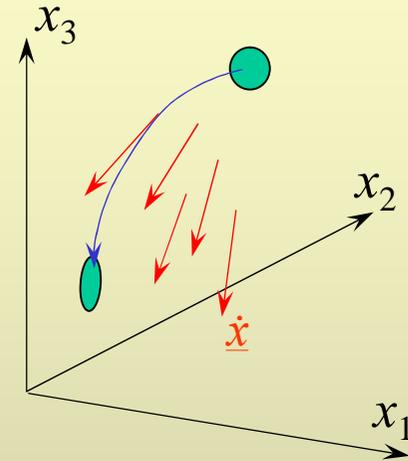


Notion de « flot »

Dans l'espace des phases, les paramètres du système évoluent au gré des lois de la mécanique :

$$\dot{x}_i = F_i(x_j) \quad \text{ou} \quad \underline{\dot{x}} = \underline{F}(\underline{x})$$

- On peut ainsi définir un « champ de vitesses » abstrait $\underline{\dot{x}}$ formellement analogue à un milieu ;
- On peut aussi définir la densité de probabilité d'être en un point, jouant le rôle d'une « masse volumique » $\tilde{\rho}$

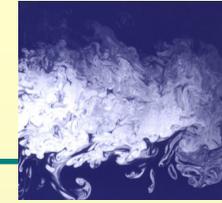


Forme mathématique du théorème de Liouville

La probabilité totale étant conservée (égale à 1), ces champs obéissent à une équation de continuité :

$$-\frac{1}{\tilde{\rho}} \frac{d\tilde{\rho}}{dt} = \text{div } \underline{\dot{x}} = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} < 0 \quad (\text{réduction des volumes})$$

Exposants de Lyapounov



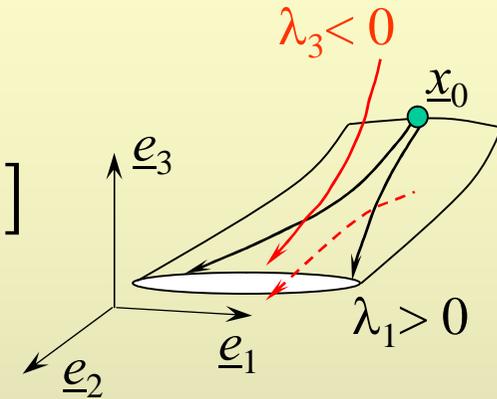
Evolution locale du système

Localement, autour du point \underline{x}_0 :

$$\dot{\underline{x}} \approx \underbrace{\underline{F}(\underline{x}_0)}_{\dot{\underline{x}}_0} + \underbrace{(\text{grad } \underline{F})(\underline{x}_0)}_{=\underline{A}} \cdot \underbrace{(\underline{x} - \underline{x}_0)}_{=\underline{\xi}} \quad \underline{A} = \underline{\text{diag}}[\lambda_i]$$

$$\dot{\underline{\xi}} = \underline{A}\underline{\xi} \quad \Rightarrow \quad \underline{\xi} = \underline{\exp}(\underline{A}t) \cdot \underline{\xi}_0 \quad \Rightarrow \quad \xi_i = \xi_{0,i} e^{\lambda_i t}$$

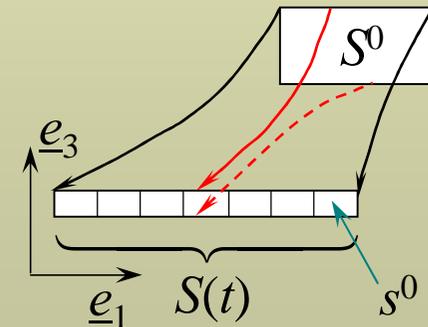
$$\text{tr } \underline{A} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} < 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_3 < \lambda_2 = 0 < \lambda_1 < |\lambda_3|$$



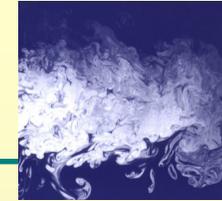
Lien avec la dimension fractale

$$\left. \begin{array}{l} S(t) = S^0 e^{(\lambda_1 + \lambda_3)t} < S^0 \\ s^0 = S^0 e^{2\lambda_3 t} < S^0 \end{array} \right\} N = \frac{S(t)}{s^0} = e^{(\lambda_1 - \lambda_3)t} > 1$$

$$k = \frac{x_3^0}{x_3(t)} = e^{-\lambda_3 t} > 1 \quad d = 1 + \log_k N = 2 + \frac{\lambda_1}{|\lambda_3|}$$



Transformée de Fourier



Passage à l'espace fréquentiel

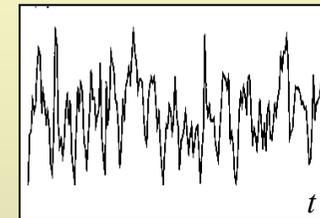
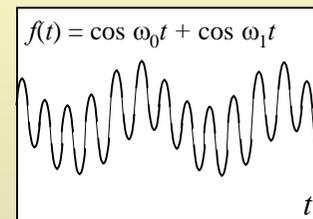
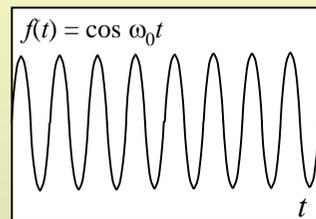


J. Fourier

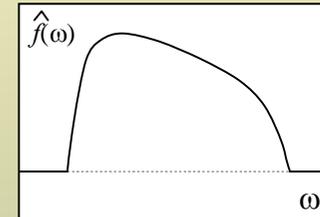
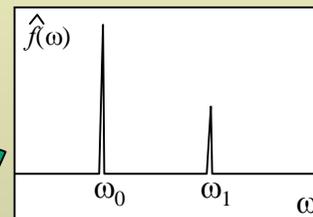
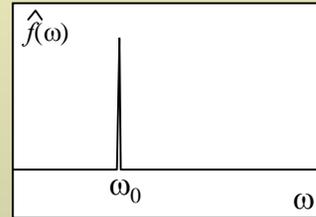
$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega_0 t) e^{-i\omega t} dt = \delta(\omega - \omega_0)$$

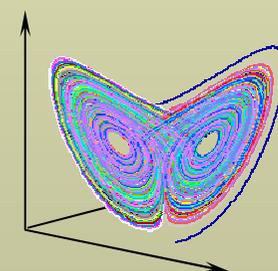
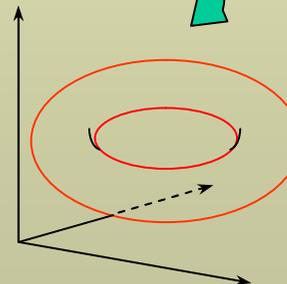
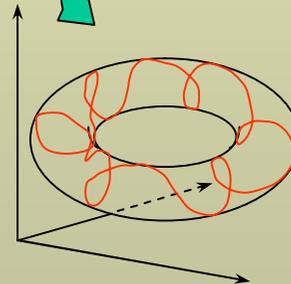
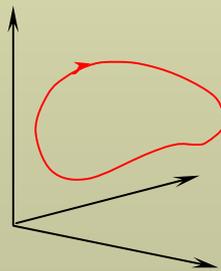
Evolution dynamique



Transformée de Fourier



Attracteur



Régime

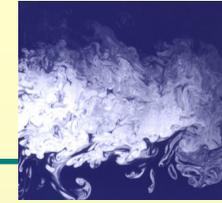
périodique
($d = 1$)

bipériodique
($d = 1$)

quasi-périodique
($d = 2$)

chaotique
($2 < d < 3$)

Résumé des différents régimes



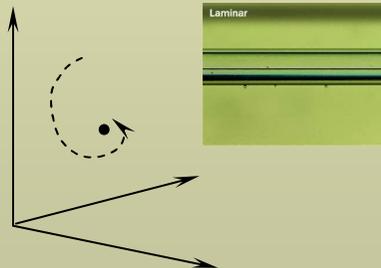
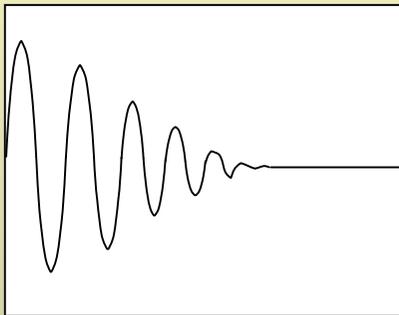
$$Re_{c,1} \cong 2100$$

$$Re_{c,2} \cong 3000$$

$$Re \sim \frac{\text{instabilité}}{\text{stabilité}}$$

Laminaire

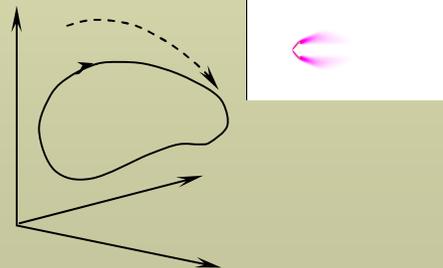
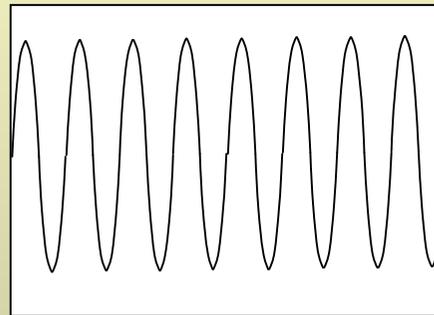
- stabilité (dissipation)
- régularité (linéarité)



attracteur ponctuel
($d = 0$)

Périodique

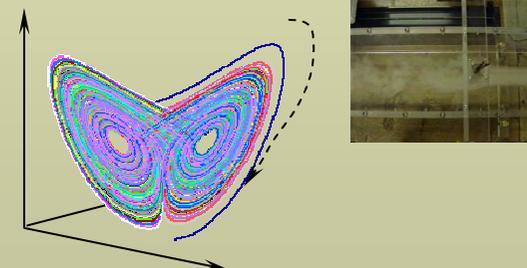
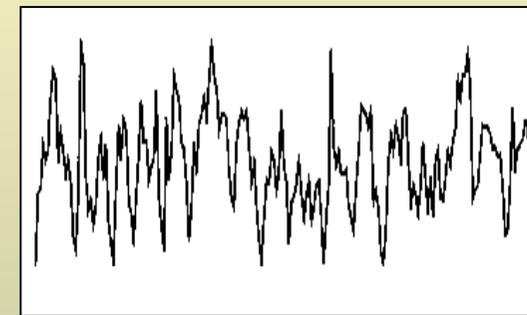
- instabilité
(non linéarité)
- rupture de symétrie



attracteur courbe ou
torique ($d = 1$ ou 2)

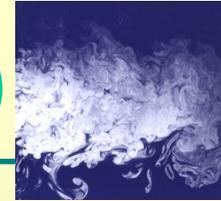
Turbulent

- sensibilité aux C.I. - diffusion
- complexité géométrique
- équilibre production - dissipation



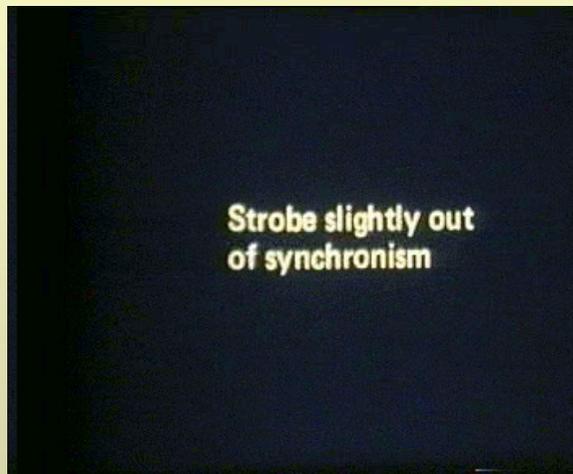
attracteur fractal
($2 < d < 3$)

Phénoménologie de la turbulence (1)



Visualisation des phénomènes présentés

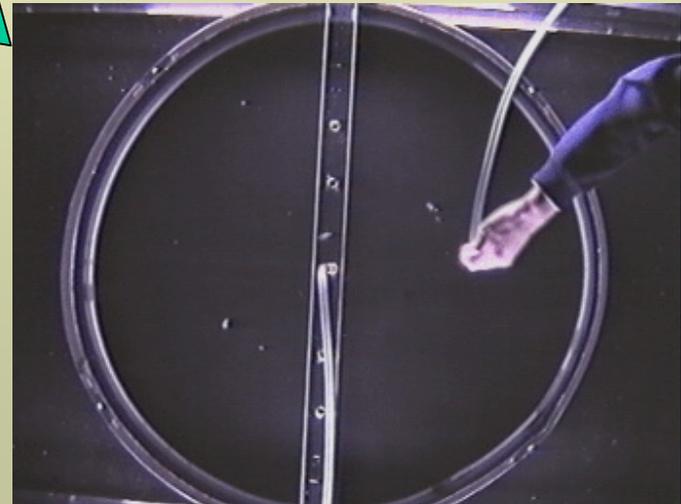
Un écoulement turbulent permet de visualiser clairement :



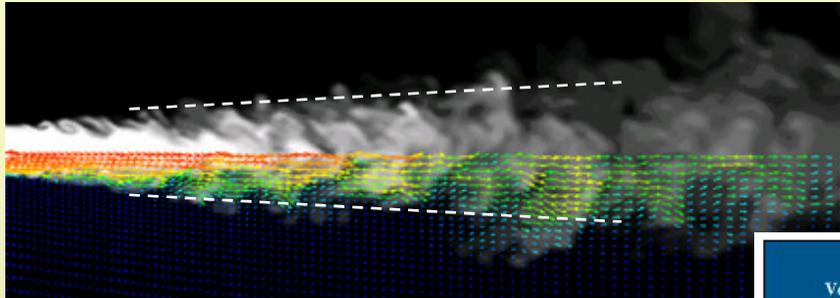
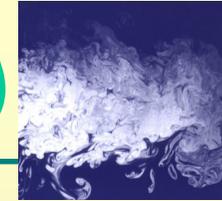
... la sensibilité aux conditions initiales



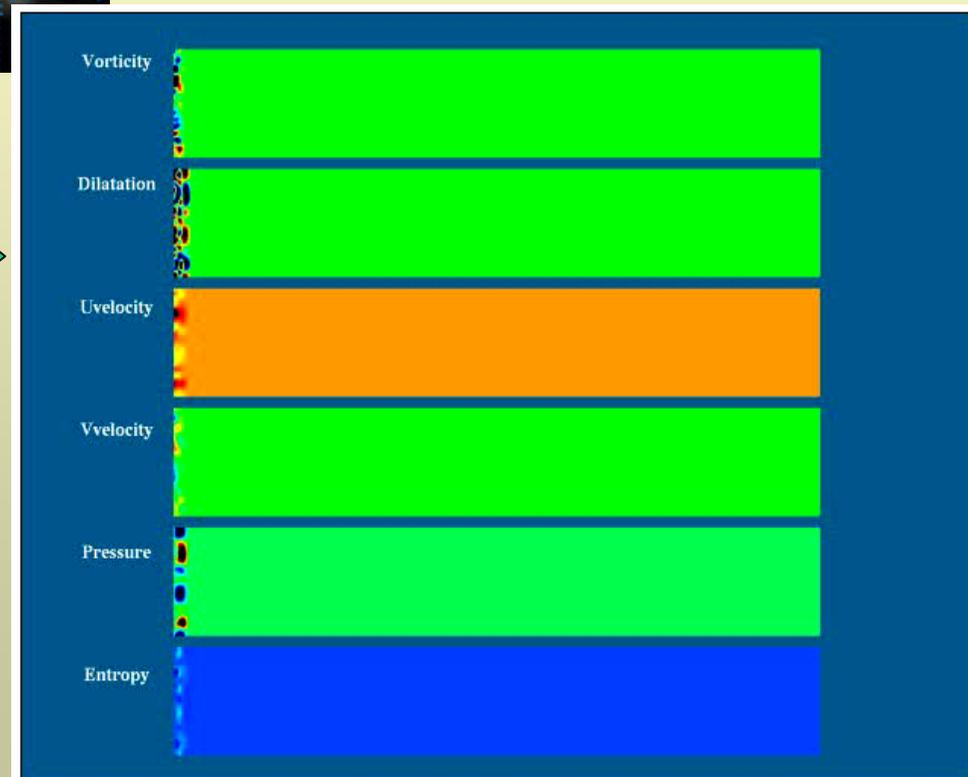
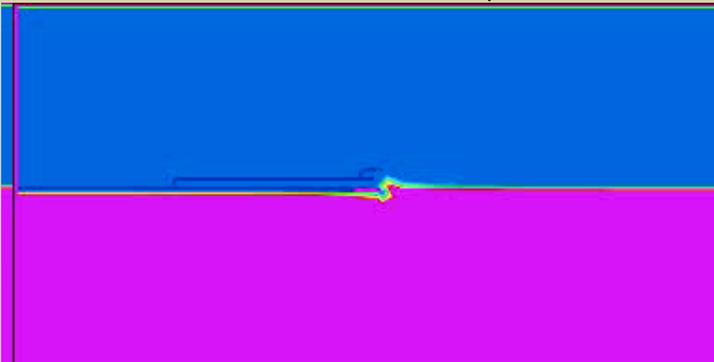
la dissipation (irréversibilité)



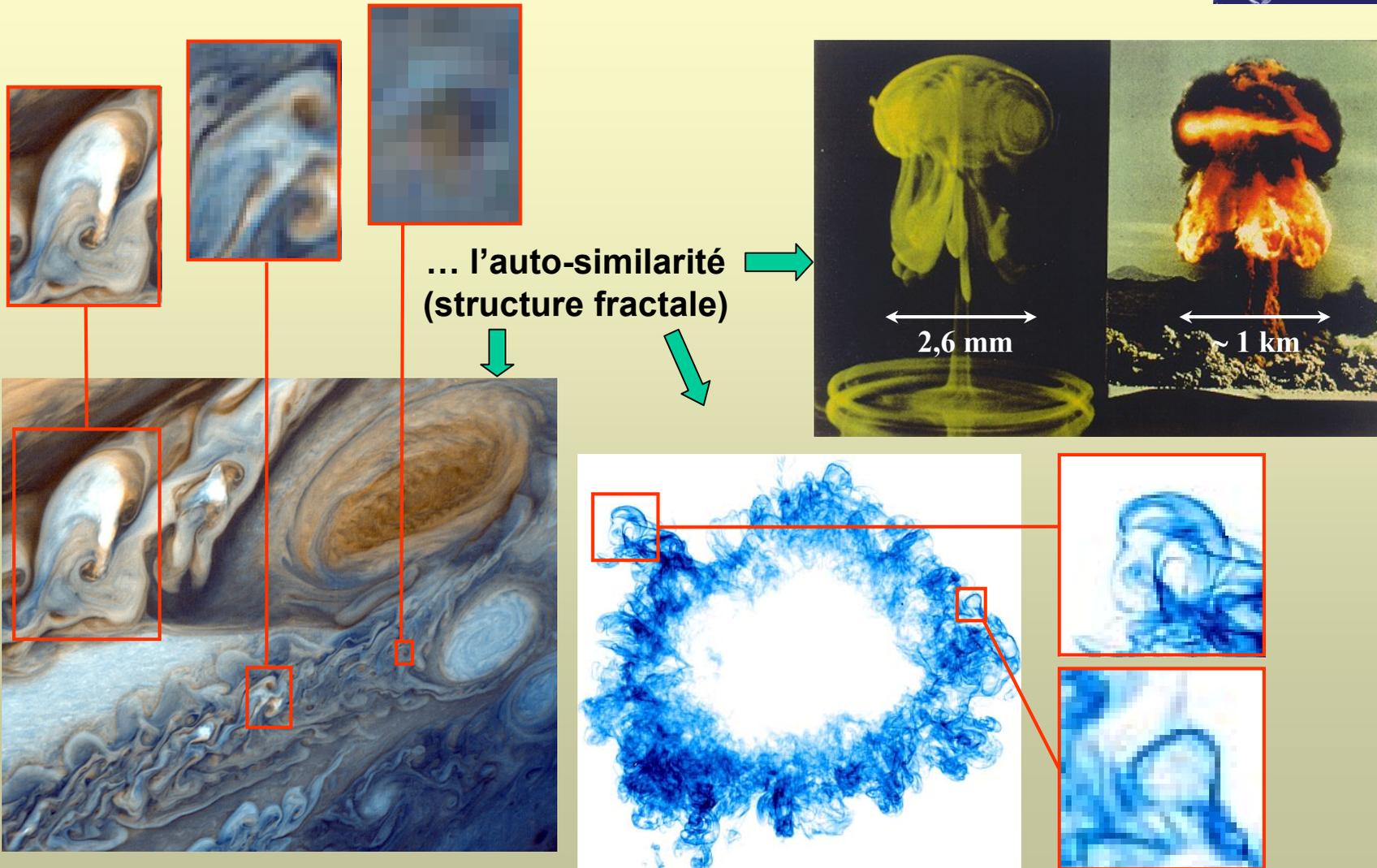
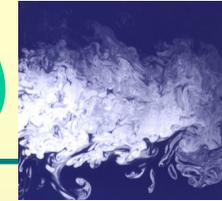
Phénoménologie de la turbulence (2)



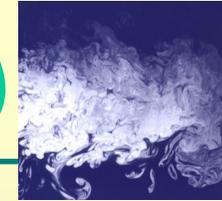
... la diffusion
(mélange)



Phénoménologie de la turbulence (3)



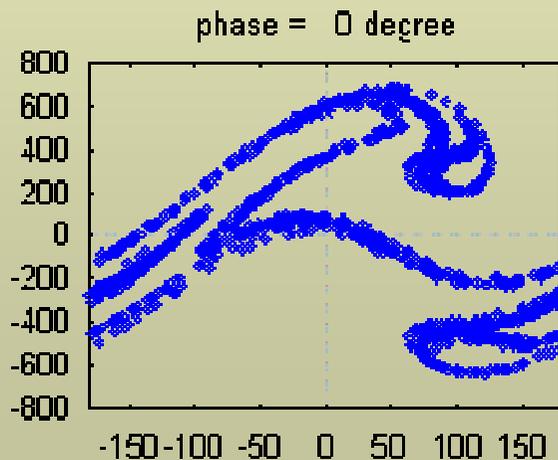
Phénoménologie de la turbulence (4)



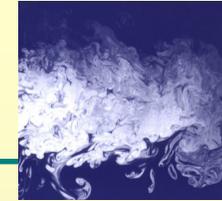
... le « feuilletage »
(étirement-repli)

Conclusions

- Les écoulements turbulents montrent tous les symptômes déjà vus
- On retrouve dans l'espace *physique* les symptômes de l'espace des phases
- Ils sont dus à la non linéarité et à un équilibre production-dissipation



La simulation directe (DNS)

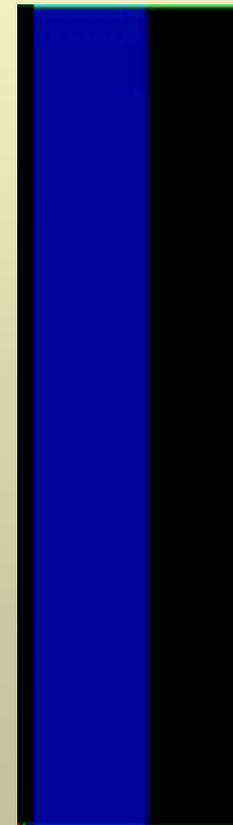
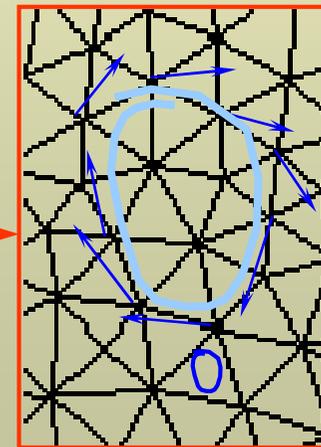
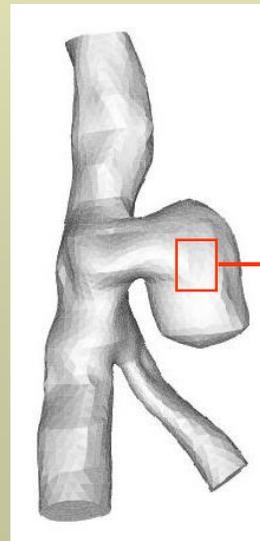
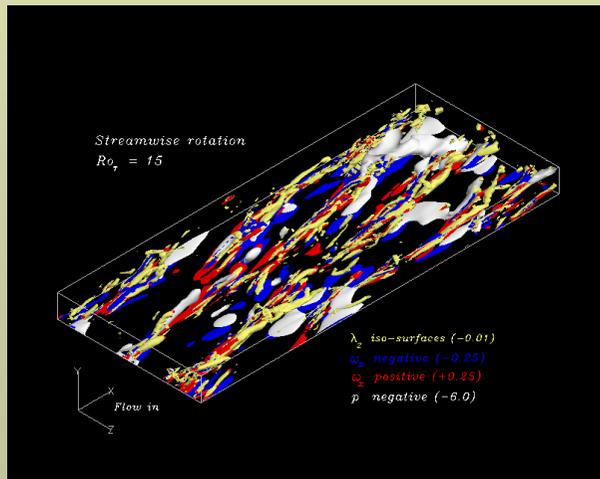


Une solution « dure » et marginale

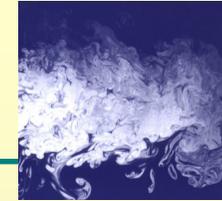
Une première solution consiste à simuler tous les tourbillons turbulents : c'est la *simulation directe* (Direct Numerical Simulation, ou DNS).

- Nécessité d'un maillage très raffiné
- Pas de temps très petit
- Infaisable pour des valeurs élevées de Re

Par conséquent, la DNS est seulement une méthode d'*investigation* numérique.



Conclusion de la 1^{ère} partie



Caractéristiques de la turbulence

Un écoulement turbulent est essentiellement caractérisé par :

- **Diffusion** (mélange, étirement-repli)
- **Dissipation** (frottement, irréversibilité)

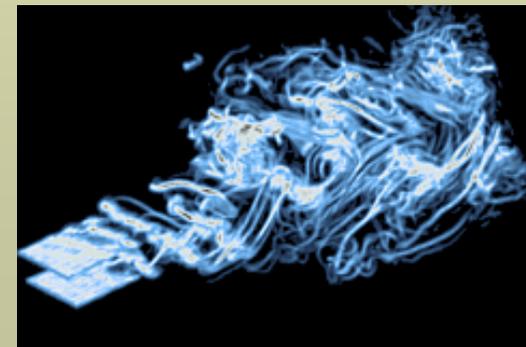
Difficultés de modélisation

Le modélisateur est confronté à deux difficultés :

- Complexité structurelle (tourbillons *tridimensionnels*)
- Sensibilité aux conditions initiales (non-reproductibilité d'une expérience ou d'une simulation numérique)

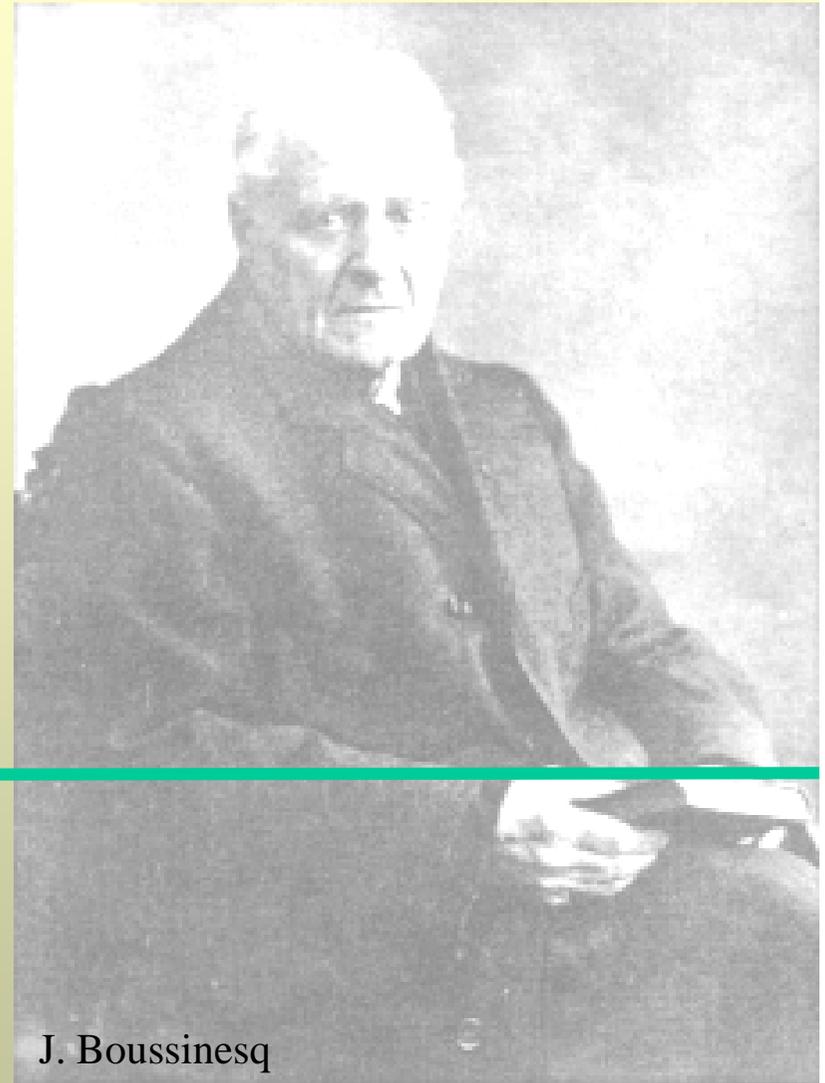


} rendent la DNS illusoire...



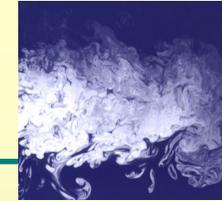
→ Nous allons mettre à profit la seconde difficulté pour résoudre la première !

***Deuxième partie :
Les équations
de Reynolds***



J. Boussinesq

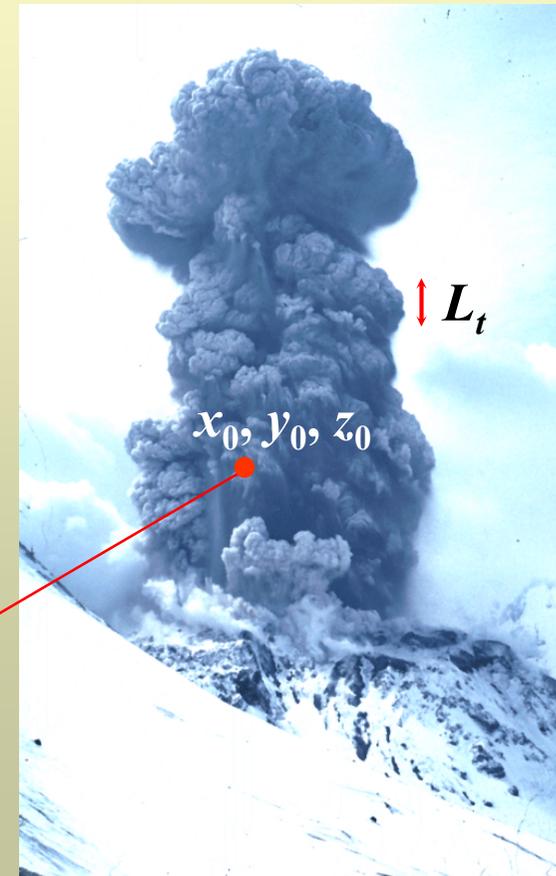
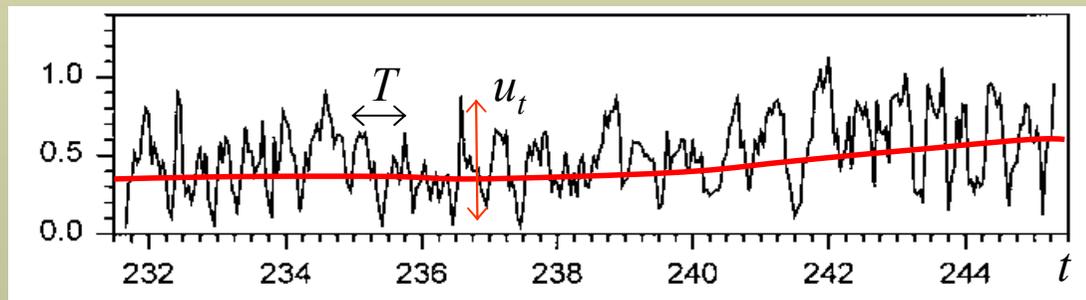
Répartition spatiale et temporelle



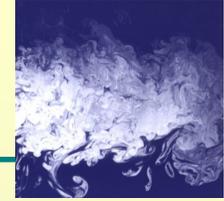
Aspect général du champ de vitesses

Un champ de vitesse turbulent présente :

- Une forte variabilité spatiale : tourbillons (ou structures) de taille $\sim L_t$
 - Une variabilité temporelle : fluctuations d'échelles de temps $\sim T$
 - Une « moyenne » lisse et peu variable
- Il paraît donc judicieux de procéder à une *moyenne statistique*



Moyennes de Reynolds (1)



Réalisation de N expériences « presque identiques »

... etc. N fois

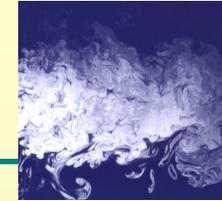
\underline{u}^1 \underline{u}^2 ... \underline{u}^N

On définit la moyenne au sens de Reynolds par :

$$\overline{\underline{u}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \underline{u}^i \quad \dots \text{insensible aux conditions initiales.}$$

Pour une réalisation *particulière* de l'expérience : $\underline{u} = \overline{\underline{u}} + \underline{u}'$
vitesse moyenne vitesse fluctuante

Moyennes de Reynolds (2)



Effet du procédé

Le champ de vitesses moyenné est :

- **Lisse** (régulier dans le temps et l'espace)
- Insensible aux conditions initiales (**reproductible**)
- Parfois constant, parfois 2D, bien que le champ réel ne le soit *jamais*

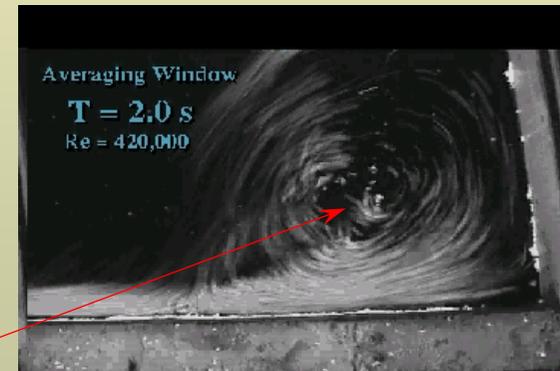
Remarques importantes

On prendra garde :

- A se souvenir de la signification physique des champ moyens
- A ne pas confondre les *structures cohérentes* (recirculations du champ moyen, *stables*) avec des tourbillons turbulents

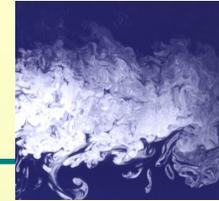


Vitesse réelle



Vitesse moyenne

Moyennes de Reynolds (3)



Remarques importantes (suite)

Un champ réel est toujours variable en espace et en temps. On parlera :

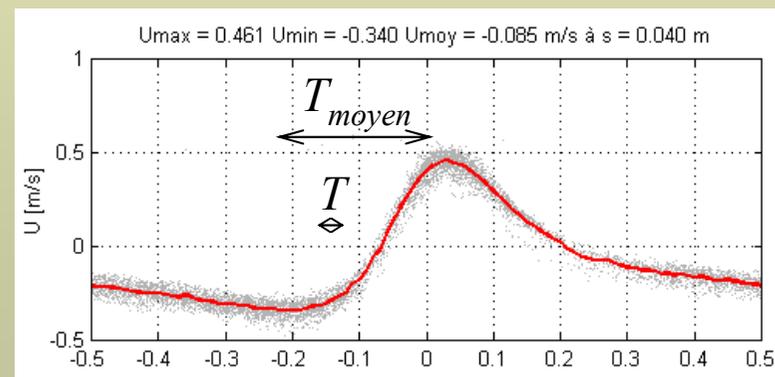
- d'écoulement permanent lorsque *toutes* les grandeurs moyennes sont constantes dans le temps ;
- d'écoulement homogène lorsque *toutes* les grandeurs moyennes sont constantes dans l'espace.

Les moyennes de Reynolds ne sont pas des moyennes spatiales ou temporelles, mais *statistiques*. Cependant, elles se ramènent...

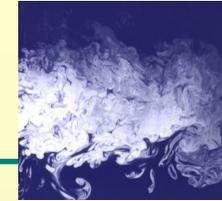
- à des moyennes spatiales lorsque l'écoulement est homogène...
- à des moyennes dans le temps lorsque l'écoulement est permanent (ou peu variable : $T_{moyen} \gg T$)

Conditions aux parois :

$$\overline{u}_{bord} = \underline{U}_{paroi} \quad \underline{u}'_{bord} = \underline{0}$$



Moyennes de Reynolds (4)



Généralisation : grandeurs moyennes et fluctuantes

$$\underline{u} = \overline{u} + u' \quad p = \overline{p} + p' \quad f = \overline{f} + f'$$

Les grandeurs moyennes n'obéissent plus aux équations de Navier-Stokes (le principe de superposition ne fonctionne pas ici !)

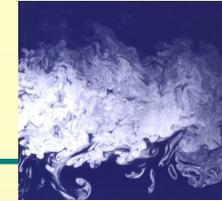
Propriétés de l'opérateur moyenne

$$\begin{aligned} \overline{\alpha f + \beta g} &= \alpha \overline{f} + \beta \overline{g} & \alpha, \beta &= \text{ctes} \\ \overline{\frac{\partial f}{\partial t}} &= \frac{\partial \overline{f}}{\partial t} & \overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}} &= \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i} \Rightarrow \overline{\text{div } \underline{f}} = \text{div } \overline{\underline{f}}, \text{ etc.} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \overline{\alpha f + \beta g} &= \alpha \overline{f} + \beta \overline{g} \\ \overline{\frac{\partial f}{\partial t}} &= \frac{\partial \overline{f}}{\partial t} \end{aligned}} \right\} \text{linéarité}$$

→ L'opérateur moyenne de Reynolds est *linéaire* et *commute* avec les opérateurs différentiels linéaires.

$$\begin{aligned} \overline{fg} &\neq \overline{f} \overline{g} & \Rightarrow \frac{d\overline{f}}{dt} &= \overline{\frac{df}{dt}} + \overline{\text{grad } f \cdot \underline{u}} \neq \frac{d\overline{f}}{dt} \\ \overline{f'g} &= \overline{f'} \overline{g} & \overline{f'} &= \overline{f'} \\ \overline{\alpha} &= \alpha & \overline{\alpha} &= \alpha \end{aligned}$$

Equations de Reynolds (1)



Equation de continuité

$$\operatorname{div} \underline{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{\operatorname{div} \underline{u}} = \overline{0} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{div} \underline{\bar{u}} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0$$

(une équation *linéaire* n'est pas affectée par l'opérateur moyenne)

Equation de quantité de mouvement

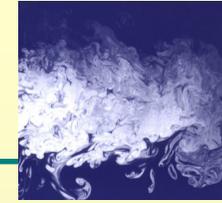
Seul le terme de convection (*non-linéaire*) sera modifié :

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial \overline{(u_i + u'_i)(u_j + u'_j)}}{\partial x_j} = \dots = \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j}$$

$$\forall i, \quad \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \Delta \bar{u}_i - \frac{\partial \overline{R_{ij}}}{\partial x_j}$$

$$\text{ou} \quad \frac{\partial \underline{\bar{u}}}{\partial t} + \underline{\operatorname{grad} \bar{u}} \cdot \underline{\bar{u}} = -\frac{1}{\rho} \underline{\operatorname{grad} \bar{p}} + \nu \Delta \underline{\bar{u}} - \underline{\operatorname{div} \underline{R}} \quad \text{avec} \quad R_{ij} = \overline{u'_i u'_j}$$

Equations de Reynolds (2)



Equation de continuité

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0$$

Equations de quantité de mouvement

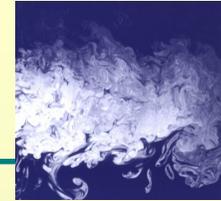
$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \bar{u} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \bar{v} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \bar{w} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu \Delta \bar{u} - \frac{\partial \overline{u'^2}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \bar{u} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \bar{v} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \bar{w} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \nu \Delta \bar{v} - \frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \bar{u} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \bar{v} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \bar{w} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \nu \Delta \bar{w} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{w'^2}}{\partial z}$$

... 6 nouvelles inconnues sont apparues (les R_{ij} : termes d'ordre 2)
Le modèle n'est plus fermé !

Contraintes de Reynolds



Les quantités R_{ij} sont appelées *contraintes (ou tensions) de Reynolds*.

Equation de transport des contraintes de Reynolds

Elle s'obtient par le procédé suivant :

- $\langle \text{Navier-Stokes} \rangle - \langle \text{Reynolds} \rangle \Rightarrow$ équation sur u'_i
- Multiplier par u'_j
- Appliquer l'opérateur moyenne

$$\forall i, j \quad \frac{\partial R_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial R_{ij}}{\partial x_k} \bar{u}_k = \dots + \{ \text{termes d'ordre 3} \} + \dots$$

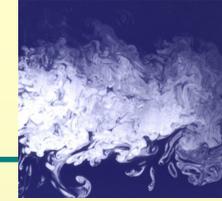
Nécessité d'une hypothèse de fermeture

D'une manière générale, nous constatons que l'équation des moments d'ordre n) fait apparaître des moments d'ordre $n + 1$ (non-linéarité).

Nous avons donc une hiérarchie infinie d'équations !

\Rightarrow Il est donc nécessaire de faire une hypothèse pour *fermer* le modèle.

Fermeture à l'ordre 1



Principe

Il s'agit de relier directement les moments d'ordre 2 (les $\overline{R_{ij}}$) aux moments d'ordre 1 (les $\overline{u_i}$).

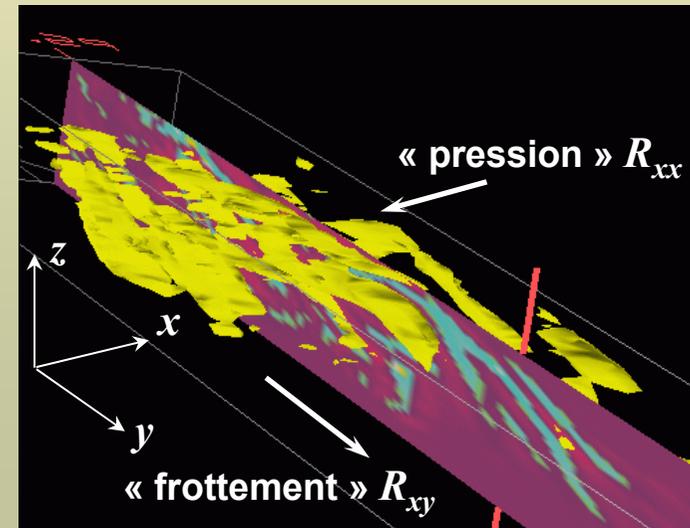
Retour (provisoire) aux équations de Cauchy

$$\forall i, \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad \forall i, \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \overline{u_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\sigma_{ij}} - \rho R_{ij})$$

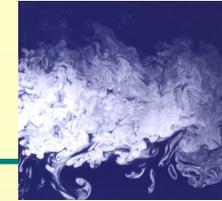
loi de comportement

$$\forall i, \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \nu \Delta u_i$$

Il s'agirait donc de trouver une « loi de comportement » pour les R_{ij} ...



Modèle de Boussinesq



Idée maîtresse

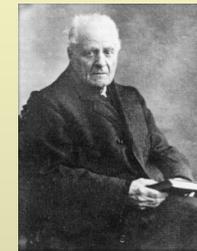
Les fluctuations se manifestent par une **diffusion** et une **dissipation**.
Si elles sont *isotropes*, un modèle *visqueux* semble donc approprié.

$$-\frac{1}{\rho} \sigma_{ij} = \frac{p}{\rho} \delta_{ij} - 2\nu s_{ij}$$
$$s_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

Stokes (1845)

$$R_{ij} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - 2\nu_T S_{ij}$$
$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) = \bar{s}_{ij}$$

Boussinesq (1880)



V. J. Boussinesq

Nouvelles définitions

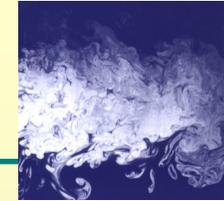
On définit deux nouvelles *variables* :

- La viscosité turbulente ν_T (m^2s^{-1})
- L'énergie cinétique turbulente k (m^2s^{-2})

$$\text{tr } \underline{\underline{R}} = \overline{u'_i u'_i} = 2k$$

$$k \equiv \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} = \frac{1}{2} \|\underline{\underline{u'}}\|^2$$

La viscosité turbulente



Propriétés

La viscosité turbulente rend compte de l'aspect diffusif et dissipatif
Des structures tourbillonnaires (écoulement fluctuant).

- $\nu_T \gg \nu$ (le mélange turbulent est généralement très efficace)
- ν_T est variable en espace et en temps
- ν_T n'est pas une propriété du fluide, mais de l'écoulement
- ν_T dépend intuitivement de l'intensité fluctuante (donc de k)

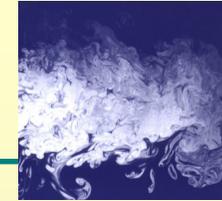
Corollaire

$\nu_T \gg \nu$ signifie que la valeur exacte de ν n'a pas d'importance.

→ Lorsque $Re = UD / \nu$ est suffisamment grand,
sa valeur exacte n'a pas d'importance.

- La diffusion moléculaire est masquée par la diffusion turbulente
- Toute quantité ne dépendant que de Re tend vers une constante lorsque Re tend vers l'infini

Retour à l'équation du mouvement



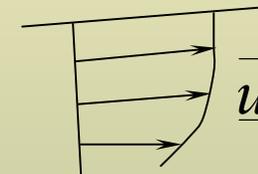
Boussinesq dans Reynolds

$$\forall i, \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \bar{u}_j = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \Delta \bar{u}_i - \frac{2}{3} \frac{\partial k}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathbf{v}_T \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathbf{v}_T \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

Approximations fréquentes :

- On introduit souvent une « nouvelle pression » : $\bar{p} \leftarrow \bar{p} + \frac{2}{3} \rho k \approx \bar{p}$
- Le dernier terme est souvent négligeable :

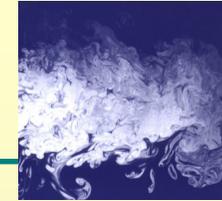
$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathbf{v}_T \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) \gg \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mathbf{v}_T \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$$



Finalement : $\forall i, \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \bar{u}_j = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mathbf{v} + \mathbf{v}_T) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right]$

ou $\frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} + \underline{\underline{\text{grad} \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{u}}}} = -\frac{1}{\rho} \underline{\underline{\text{grad} \bar{p}}} + \underline{\underline{\text{div}}} [(\mathbf{v} + \mathbf{v}_T) \underline{\underline{\text{grad} \bar{\mathbf{u}}}}]$

Conclusions de la 2^{ème} partie



Où en sommes-nous ?

Nous avons à présent un système *presque* fermé, car nous n'avons pas encore de moyen de calculer la viscosité turbulente.

- Nous sommes donc en présence d'une *famille* de modèles
- Il est nécessaire de pousser plus avant nos réflexions

Remarque sur l'existence des moyennes de Reynolds

La convergence de la série $\bar{u} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u^i$ quand $N \rightarrow \infty$ pose problème.

Le modèle de viscosité turbulente permet de lever cette indétermination :

L'instabilité de vitesse (réelle) survient lorsque $Re > Re_{c,1} \cong 2100$

Or, dans les équations de Reynolds (muni du modèle de Boussinesq) :

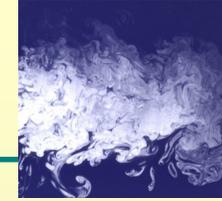
$$\frac{\text{Convection}}{\text{Diffusion}} = \frac{|\underline{\text{grad}} \bar{u} \cdot \bar{u}|}{|\underline{\text{div}}[(\nu + \nu_T) \underline{\text{grad}} \bar{u}]|} \sim \frac{UD}{\nu_T} \sim 100 \Rightarrow \text{stabilité de } \bar{u}$$

***Troisième partie :
La vision de
Kolmogorov***



A. Kolmogorov

L'énergie cinétique turbulente (1)



Signification de $k \equiv \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$

C'est l'énergie cinétique recelée par les tourbillons (par unité de masse). Elle constitue une mesure de l'intensité tourbillonnaire.

Equation de transport de l'énergie cinétique

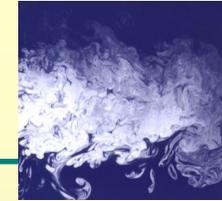
On l'obtient en prenant la trace de l'équation de transport des R_{ij} :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k}{\partial x_j} \bar{u}_j = -R_{ij} S_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\underbrace{-\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_j}}_{\text{ordre 3}} - \frac{1}{\rho} \overline{u'_j p'} + \nu \overline{u'_i s'_{ij}} \right) - \nu \bar{s}^2$$

$$\text{avec } s'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} \right) = s_{ij} - S_{ij}$$

Cette équation nécessite à nouveau une hypothèse de fermeture.

L'énergie cinétique turbulente (2)



Détails sur l'équation de transport de k

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k}{\partial x_j} \bar{u}_j = \underbrace{-R_{ij} S_{ij}}_{=P} + \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\left(-\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i u'_j} - \frac{1}{\rho} \overline{u'_j p'} + 2\nu \overline{u'_i s'_{ij}} \right)}_{=Q_j^k} - \underbrace{\nu \bar{s}^2}_{=\varepsilon}$$

c'est-à-dire :
$$\frac{Dk}{dt} = P + \text{div } \underline{Q}^k - \varepsilon$$

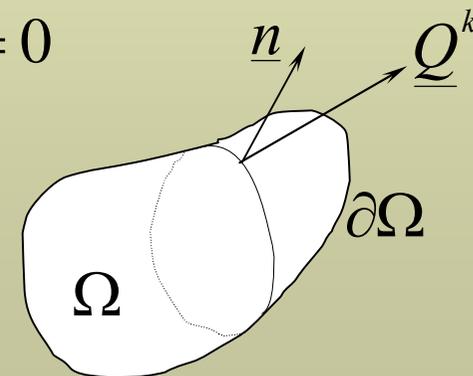
Le terme central n'apporte aucune contribution

au bilan *total* d'énergie :
$$\int_{\Omega} \text{div } \underline{Q}^k d\Omega = \oint_{\partial\Omega} \underline{Q}^k \cdot \underline{n} d\Gamma = 0$$

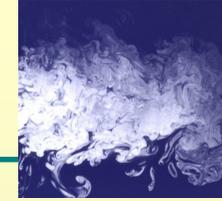
C'est donc un terme de *diffusion* : \underline{Q}^k est le *flux* de k

En revanche :

- P est un terme source (*production* d'énergie)
- ε est un terme puits (*dissipation* d'énergie)



Production d'énergie



Production P

$$\left. \begin{aligned} P &= -R_{ij} S_{ij} \\ R_{ij} &= \frac{2}{3} k \delta_{ij} - 2\nu_T S_{ij} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} P &= 2\nu_T S_{ij} S_{ij} \\ &= \nu_T S^2 > 0 \end{aligned}$$

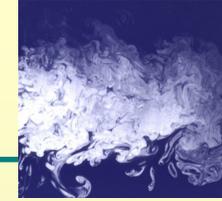
- Il s'agit d'un apport d'énergie (terme source)
- Cet apport est dû aux *gradients* de vitesse moyenne
- Un bilan d'énergie cinétique moyenne ferait apparaître le même terme avec un signe opposé :

$$\frac{D}{dt} \left(\frac{\overline{u_i u_i}}{2} \right) = \text{diffusion} - P$$

- Il s'agit donc d'une énergie prélevée au champ moyen par le champ fluctuant.

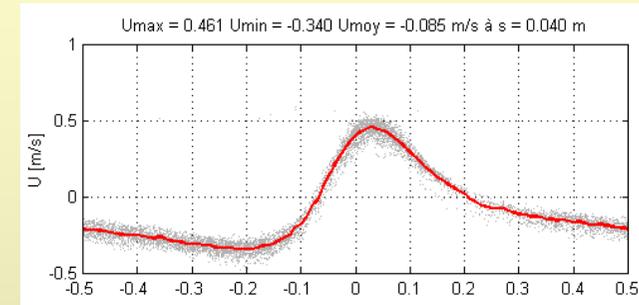


Dissipation d'énergie



Dissipation ε

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \overline{\nu s^2} = \bar{e} = 2\nu \overline{(S_{ij} + s'_{ij})(S_{ij} + s'_{ij})} \\ &= 2\nu \overline{(S_{ij}S_{ij} + s'_{ij}s'_{ij})} \\ &\approx 2\nu \overline{s'_{ij}s'_{ij}} \approx \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}\end{aligned}$$



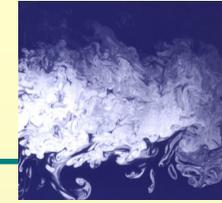
$$\overline{s'_{ij}s'_{ij}} \gg \overline{S_{ij}S_{ij}}$$

- Il s'agit d'une perte d'énergie (terme puits)
- Cette perte est due à la viscosité
- Le bilan d'énergie cinétique *réelle* fait apparaître le même terme avec le même signe (non moyenné) :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{u_i u_i}{2} \right) = \text{diffusion} - e$$

➔ Ce sont donc les tourbillons qui dissipent l'énergie cinétique

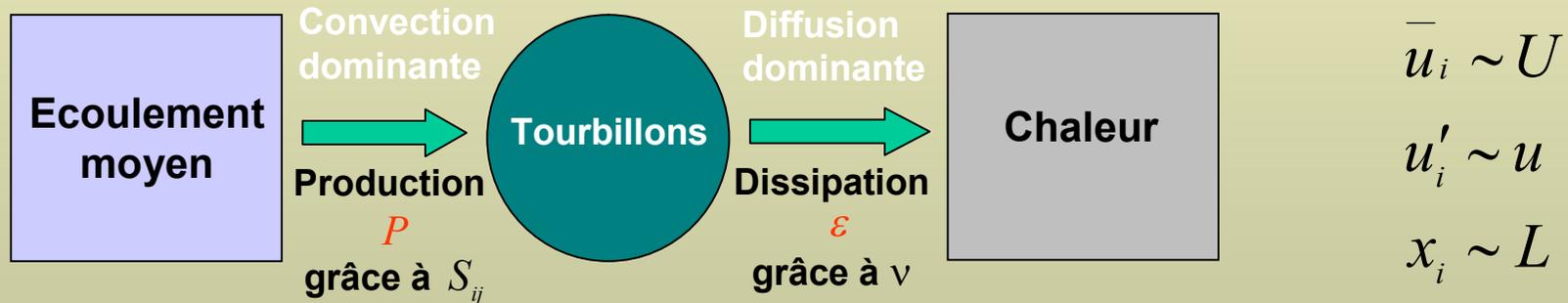
Equilibre production-dissipation



Cas d'une turbulence homogène et permanente

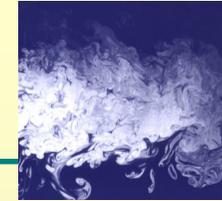
$$\frac{Dk}{dt} = P + \text{div} \underline{Q}^k - \varepsilon \Rightarrow P \approx \varepsilon$$

- Il y a équilibre production-dissipation
- La viscosité permet aux tourbillons de dissiper l'énergie prélevée au champ moyen :



Cependant : $\frac{\varepsilon}{P} \approx \frac{2\nu \overline{s'_{ij} s'_{ij}}}{-\overline{u'_i u'_j} S_{ij}} \sim \frac{\nu (u/L)^2}{u^2 U / L} = \frac{\nu}{UL} \propto \frac{1}{Re} \rightarrow 0 \dots \text{paradoxe !}$

Cascade de Kolmogorov (1)

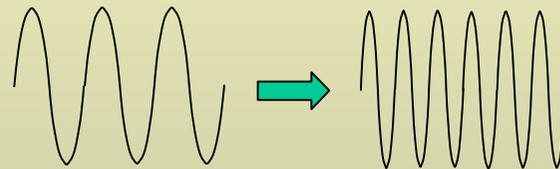


Cas d'un champ de vitesse sinusoïdal 1D

Effet du terme de convection :

$$u = U \sin \frac{2\pi x}{\lambda} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} u = \frac{2\pi U}{\lambda} \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \times U \sin \frac{2\pi x}{\lambda} = \frac{\pi U^2}{\lambda} \sin \frac{4\pi x}{\lambda}$$

Les « longueurs d'onde » λ sont transformées en « longueurs d'onde » $\lambda / 2$ (*dédoublément fréquentiel*) :

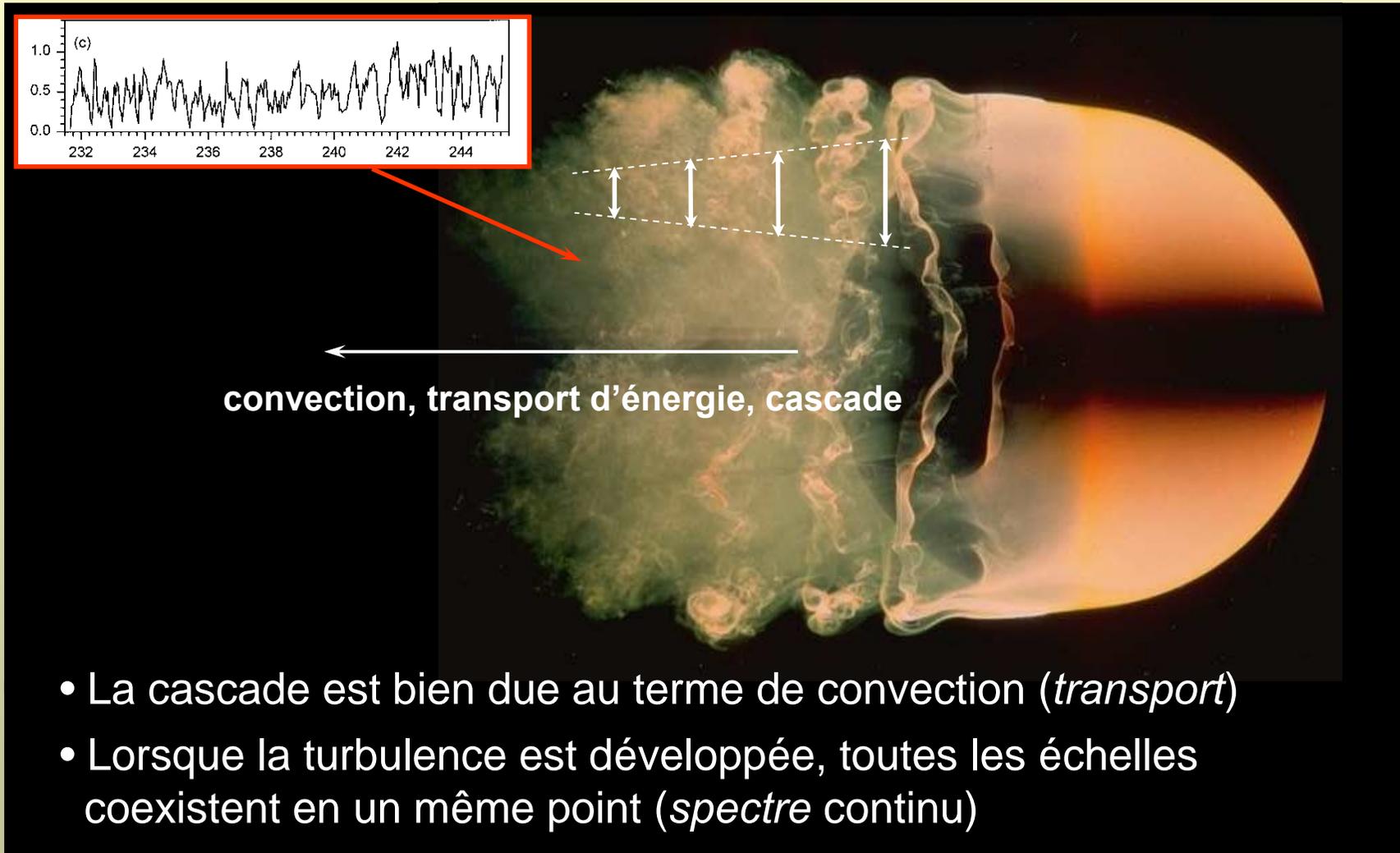
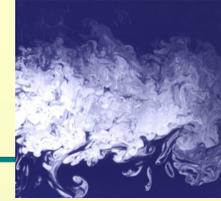


Cas général

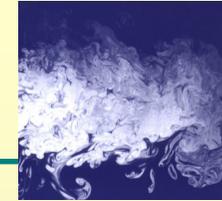
- Le terme de convection disloque les structures tourbillonnaires en structures plus petites
 - Les structures « mères » cèdent une partie de leur énergie aux structures « filles »
- ➔ Il y a une *cascade d'énergie* des grands tourbillons vers les petits.



Cascade de Kolmogorov (2)



Cascade de Kolmogorov (3)



Arrêt de la cascade

Le phénomène de dislocation perdure jusqu'à l'échelle à laquelle le terme visqueux prend le dessus sur la convection.

Pour un tourbillon de « taille » λ , on peut construire un nombre de Reynolds « local » :

$$\left(\frac{\text{Convection}}{\text{Diffusion}} \right)_\lambda \sim Re_\lambda = \frac{u_\lambda \lambda}{\nu} \gg 1$$

La taille λ_0 des plus petits tourbillons et leur vitesse caractéristique u_0 sont donc reliées par :

$$Re_{\lambda_0} \sim 1 \Rightarrow \lambda_0 \sim \frac{\nu}{u_0}$$

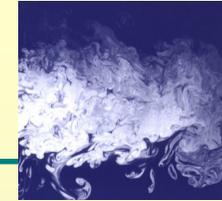
Pour des échelles inférieures à λ_0 (échelle de Kolmogorov), la diffusion homogénéise le champ de vitesse et dissipe l'énergie. La dislocation est stoppée.



*Big whorls have little whorls
That feed on their velocity,
And little whorls have lesser whorls
And so on to viscosity.*

Lewis F. Richardson

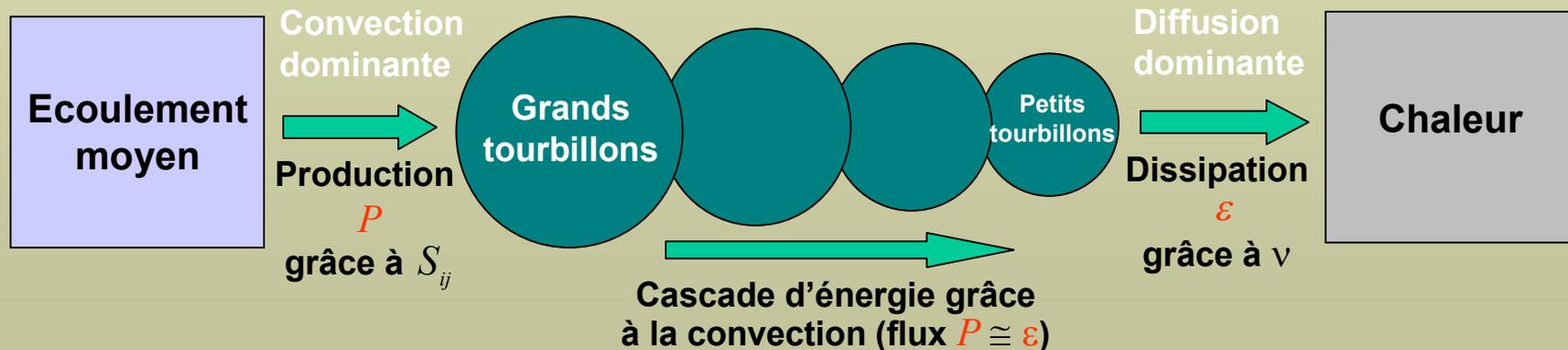
Cascade de Kolmogorov (4)



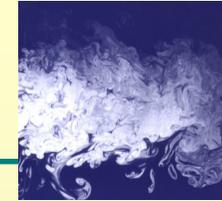
Grands et petits tourbillons

Les tourbillons sont répartis entre :

- les grands tourbillons, de taille L_t (échelle intégrale, proche des dimensions de l'écoulement) et de vitesse u_t , qui sont le siège de la production P
- les petits tourbillons, de taille λ_0 (généralement très petite) et de vitesse u_0 , qui sont le siège de la dissipation ε par la viscosité ν
- ... sur une gamme de tailles intermédiaires entre λ_0 et L_t , couvrant un spectre *continu* (on retrouve l'auto-similarité) :



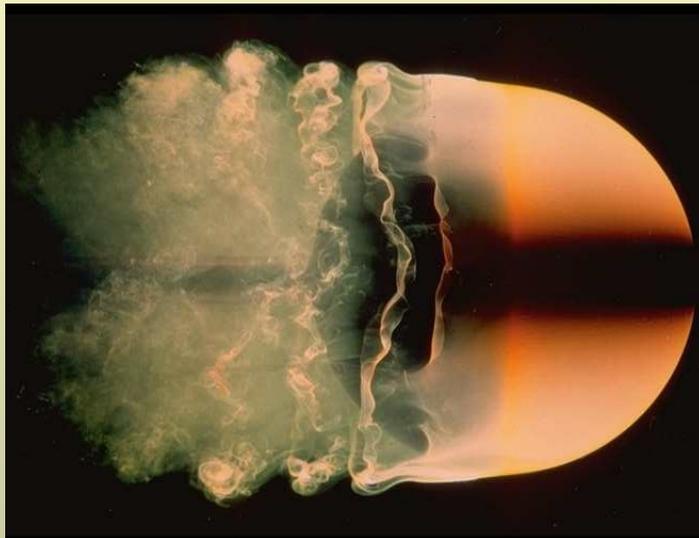
Deux visions complémentaires



Récriture de l'équilibre production-dissipation

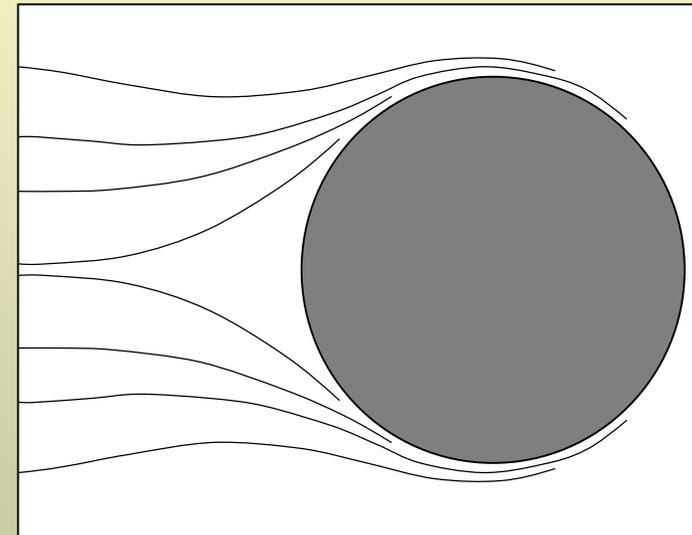
$$\overline{v s^2} = \varepsilon \approx P = \nu_T S^2$$

Point de vue
« vitesses réelles »



dissipation réelle $\varepsilon = \overline{v s^2}$

Point de vue
« vitesses moyennes »

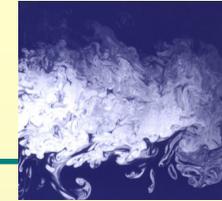


dissipation modélisée $P = \nu_T S^2$

$$\overline{s^2} \gg S^2$$
$$v \ll \nu_T$$

La notion de viscosité turbulente permet de reporter la dissipation sur les gradients de vitesse moyenne, bien que ceux-ci soient faibles.

Décomposition spectrale



Principe

- La notion de « tourbillon » est ambiguë et inexacte. Il faut concevoir un écoulement turbulent comme la superposition de différents *modes*.
- Une structure de « taille » λ peut être associée à un mode de vibration de nombre d'onde K :

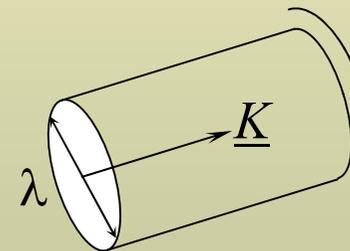
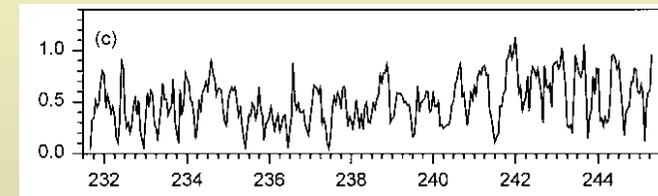
$$K = \frac{2\pi}{\lambda}$$

A de grandes valeurs de K correspondent de petits tourbillons, et inversement.

- Plus précisément, un tourbillon est caractérisé par un vecteur \underline{K} :
- On peut alors décomposer le signal fluctuant en série de Fourier :

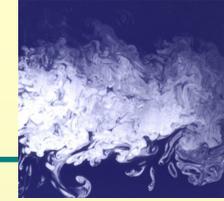
$$u'_i(\underline{x}, t) = \int_{R^3} \hat{u}'_i(\underline{K}, t) e^{-i\underline{K} \cdot \underline{x}} d\underline{K}$$

$$\hat{u}'_i(\underline{K}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{R^3} u'_i(\underline{x}, t) e^{-i\underline{K} \cdot \underline{x}} d\underline{x}$$



$$\hat{u}'_i(-\underline{K}, t) = \hat{u}'_i^*(\underline{K}, t)$$

Spectres d'énergie et de dissipation



Spectres pour une turbulence homogène

$$u'_i u'_i = \int_{R^3} \int_{R^3} \hat{u}'_i(\underline{K}) \hat{u}'_i(\underline{K}') e^{i(\underline{K}+\underline{K}') \cdot \underline{x}} d\underline{K} d\underline{K}' \quad \frac{1}{V} \int_{\Omega} e^{i(\underline{K}+\underline{K}') \cdot \underline{x}} d\underline{x} = \delta(\underline{K} + \underline{K}')$$

$$k = \frac{1}{2V} \int_{\Omega} \int_{R^3} \int_{R^3} \hat{u}'_i(\underline{K}) \hat{u}'_i(\underline{K}') e^{i(\underline{K}+\underline{K}') \cdot \underline{x}} d\underline{K} d\underline{K}' d\underline{x}$$

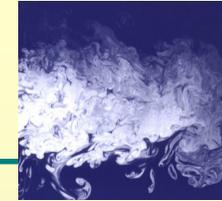
$$= \frac{1}{2V} \int_{R^3} \hat{u}'_i(\underline{K}) \hat{u}'_i(-\underline{K}) d\underline{K} = \frac{1}{2V} \int_{R^3} |\hat{u}'_i(\underline{K})|^2 d\underline{K}$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = i \int_{R^3} K_j \hat{u}'_i(\underline{K}) e^{i\underline{K} \cdot \underline{x}} d\underline{K}$$

$$\varepsilon \approx \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = -\frac{\nu}{V} \int_{\Omega} \int_{R^3} \int_{R^3} K_j K'_j \hat{u}'_i(\underline{K}) \hat{u}'_i(\underline{K}') e^{i(\underline{K}+\underline{K}') \cdot \underline{x}} d\underline{K} d\underline{K}' d\underline{x}$$

$$= \frac{\nu}{V} \int_{R^3} K_j K_j \hat{u}'_i(\underline{K}) \hat{u}'_i(-\underline{K}) d\underline{K} = \frac{\nu}{V} \int_{R^3} K^2 |\hat{u}'_i(\underline{K})|^2 d\underline{K} \quad K = |\underline{K}|$$

Spectres scalaires



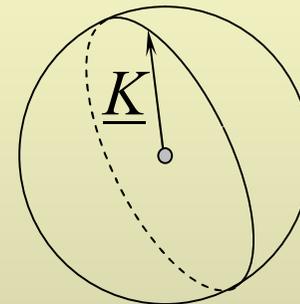
Développement de k et ε selon K

Pour une turbulence isotrope (pas de direction privilégiée pour les tourbillons), en intégrant sur toutes les directions possibles de \underline{K} :

$$k = \int_0^{+\infty} E(K) dK$$

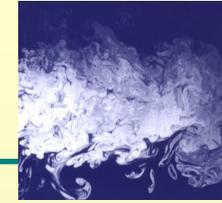
$$\varepsilon = \int_0^{+\infty} D(K) dK$$

$$K = |\underline{K}|$$



- $E(K)$ et $D(K)$ dépendent des \hat{u}'_i
 - $E(K)$ est le spectre d'énergie : $E(K)dK$ est l'énergie contenue par les tourbillons de nombre d'onde compris entre K et $K + dK$
 - $D(K)$ est le spectre de dissipation, lié à E par $D(K) = 2\nu K^2 E(K)$
- En raison de la petitesse de ν , nous voyons que la dissipation ne peut prendre des valeurs élevées que si K est grand (petits tourbillons).

Propriétés des spectres



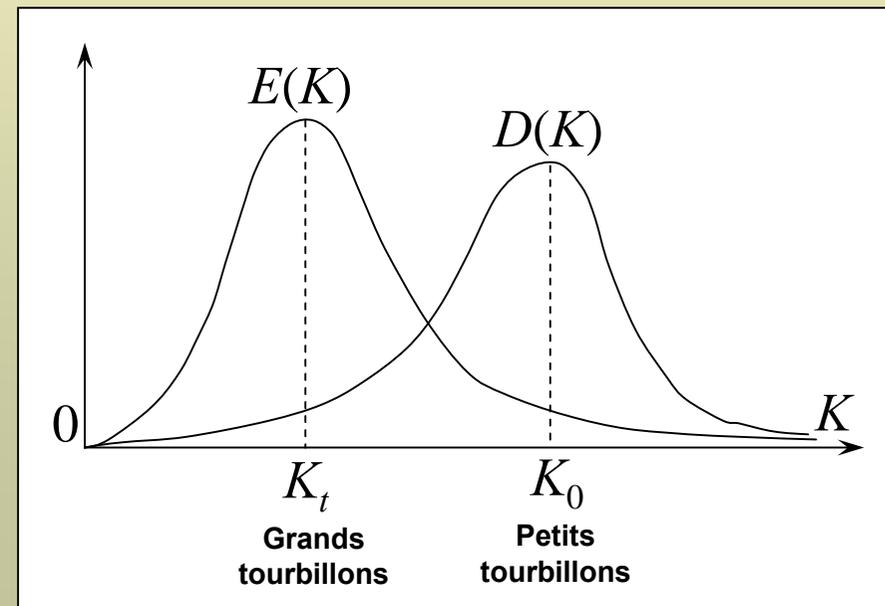
Allures des spectres E et D

- $E(K)$ et $D(K)$ valent 0 en $K = 0$ (pas de tourbillons de taille infinie !)
- $E(K)$ et $D(K)$ tendent vers 0 quand $K \rightarrow \infty$ (intégrales convergentes)
- $E(K)$ tend plus rapidement vers 0 que $D(K)$, car $D(K) = 2\nu K^2 E(K)$
- E et D possèdent chacun un maximum (un seul, expérimentalement)
- Le maximum de E apparaît avant celui de D , car :

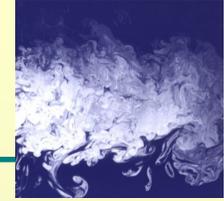
$$\frac{dD}{dK} = 2\nu K \left(2E + K \frac{dE}{dK} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{dD}{dK} > 0 \quad \text{quand} \quad \frac{dE}{dK} = 0$$

$$\text{On pose } K_t = \frac{2\pi}{L_t} ; K_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$



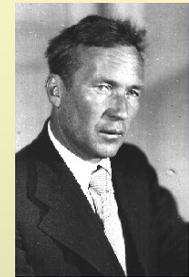
Analyse de Kolmogorov (1)



Hypothèses de Kolmogorov

Conformément à ce qui précède, A. N. Kolmogorov a proposé en 1938 les hypothèses suivantes :

- les **grands tourbillons** sont essentiellement porteurs de l'énergie cinétique k , et ne dépendent pas de ν
- les **petits tourbillons** sont le siège essentiel de la dissipation, et ne dépendent pas de k
- **Tous** les tourbillons dépendent de ε ($\cong P$), qui représente le *flux d'énergie* des grands tourbillons vers les petits

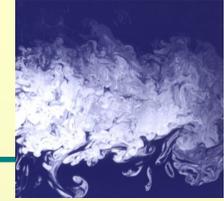


A. N. Kolmogorov

Avantages et conséquences

- Les hypothèses de Kolmogorov, issues de l'intuition, sont très bien vérifiées par l'expérience
- Elles permettent de déterminer les grandeurs caractéristiques des grands et petits tourbillons grâce à l'*analyse dimensionnelle*

Analyse de Kolmogorov (2)



Rappel : théorème de Vaschy-Buckingham

Si un phénomène est décrit par n variables comptant p unités, alors :

- On peut former $n - p$ nombres adimensionnels Π_i indépendants ;
- Il existe une fonction reliant ces nombres :

$$f(\Pi_1, \dots, \Pi_{n-p}) = 0$$

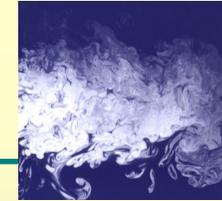
En particulier, si $n - p = 1$, il existe un seul nombre adimensionnel, Et celui-ci est *constant* (déterminé par l'expérience).

Application : estimation de l'échelle de Kolmogorov

Ce théorème permet de déterminer, par exemple, λ_0 :

$$\begin{aligned}\lambda_0 &= f(k, P, \varepsilon, \nu) = f(k, \varepsilon, \nu) \quad (P \approx \varepsilon) \\ &= f(\varepsilon, \nu) \quad (\text{deuxième hypothèse de Kolmogorov}) \\ n = 3, p = 2 &\Rightarrow \frac{\lambda_0 \varepsilon^{1/4}}{\nu^{3/4}} = Cte \quad \Rightarrow \lambda_0 \sim (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}\end{aligned}$$

Echelles spatio-temporelles



Echelles turbulentes

La méthode précédente permet de déterminer...

- les échelles des grands tourbillons :

$$L_t \sim \frac{k^{3/2}}{\varepsilon} \quad u_t \sim k^{1/2} \quad T \sim \frac{L_t}{u_t} \sim \frac{k}{\varepsilon}$$

- les échelles des petits tourbillons :

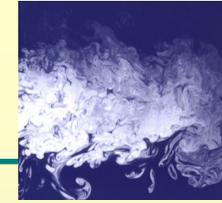
$$\lambda_0 \sim \left(\frac{v^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad u_0 \sim (v\varepsilon)^{1/4} \quad \tau_0 \sim \frac{\lambda_0}{u_0} \sim \left(\frac{v}{\varepsilon} \right)^{1/2}$$

Explication du « paradoxe »

$$1 \approx \frac{\varepsilon}{P} = \frac{2v \overline{s'_{ij} s'_{ij}}}{-\overline{u'_i u'_j} S_{ij}} \sim \frac{v(u_0 / \lambda_0)^2}{u_t^2 U / L_t} \sim \frac{u_t}{U}$$

L'échelle de vitesse des grands tourbillons est « proche » de celle de l'écoulement moyen.

Spectre de Kolmogorov



Gamme inertielle

L'étendue de la « gamme » des structures turbulentes est donnée par :

$$\frac{L_t}{\lambda_0} \sim \left(\frac{u_t L_t}{\nu} \right)^{3/4} \equiv Rt^{3/4} \quad (\text{nombre de Reynolds turbulent})$$

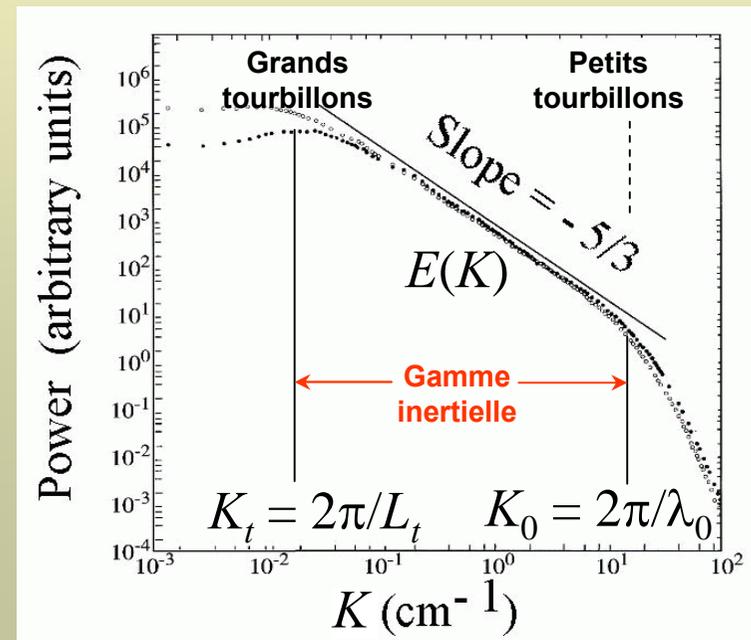
Rt est une fonction croissante de Re .

Quand Re est suffisamment grand, existe une gamme où les tourbillons ne font que transmettre l'énergie :

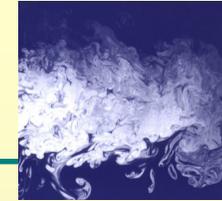
$$\begin{aligned} E(K) &= f(k, \varepsilon, \nu, K) = f(\varepsilon, K) \\ &= c_K \varepsilon^{2/3} K^{-5/3} \end{aligned}$$

c_K (constante de Kolmogorov) $\cong 1,5$

Quand Re croît, la gamme inertielle s'allonge pour transférer l'énergie jusqu'à l'échelle où elle sera dissipée.



Longueur de mélange



Estimation grossière de la viscosité turbulente

- ν_T dépend des grands tourbillons (diffusion turbulente) :

$$\begin{aligned} \nu_T &= f(k, \varepsilon, \nu) \\ &= f(k, \varepsilon) \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}} \quad C_\mu \approx 0,09$$

- Autrement dit $\nu_T \sim k^{1/2} L_t \sim u_t L_t$ (vitesse \times distance)
 - Un autre point de vue : ν_T ne dépend pas de ν car $Re_t = \frac{u_t L_t}{\nu} \sim \frac{\nu_T}{\nu}$
 - Equilibre production-dissipation : $\varepsilon \approx P = \nu_T S^2$
- Conclusion : $\boxed{\nu_T \sim L_t^2 S}$

Modèle de longueur de mélange (L. Prandtl, 1925)

Hypothèse : il existe une longueur *locale* $L_m \sim L_t$ telle que :

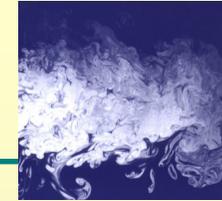
$$\nu_T = L_m^2 S$$

→ Problème : comment estimer L_m , qui dépend des x_i et de t ?



L. Prandtl

Diffusion turbulente d'un traceur (1)



Equation moyennée d'un traceur C

- Rappel : équation des vraies grandeurs \underline{u} et C

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial C}{\partial x_i} u_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_C \frac{\partial C}{\partial x_i} \right) + S_C$$

- Moyenne de Reynolds : $C = \bar{C} + C'$

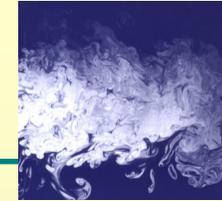
$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_i} \bar{u}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_C \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial \overline{u'_i C'}}{\partial x_i} + \bar{S}_C$$

ou $\frac{D\bar{C}}{dt} = \text{div} \left(\underbrace{K_C \text{grad} \bar{C}}_{\text{flux moléculaire}} - \underbrace{\underline{Q}^{C,T}}_{\text{flux turbulent}} \right) + \bar{S}_C$ avec $Q_i^{C,T} = \overline{u'_i C'}$

$\underbrace{\text{flux moléculaire}}_{= -\underline{q}^C} = \underbrace{\text{flux moléculaire} - \text{flux turbulent}}_{= -\underline{Q}^C} : \text{flux total de } C$



Diffusion turbulente d'un traceur (2)



Fermeture pour le flux turbulent

Par analogie avec le modèle de Boussinesq :

$$\frac{1}{\rho} \sigma_{ij} = -\frac{p}{\rho} \delta_{ij} + 2\nu s_{ij}$$

$$q_i^C = -K_C \frac{\partial C}{\partial x_i}$$

Diffusion moléculaire

$$R_{ij} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - 2\nu_T S_{ij}$$

$$Q_i^{C,T} = -K_{C,T} \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_i}$$

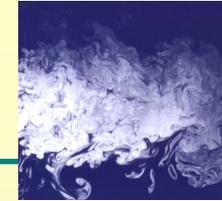
Diffusion turbulente

Enfinement :
$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_i} \bar{u}_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(K_C + K_{C,T}) \frac{\partial \bar{C}}{\partial x_i} \right] + \bar{S}_C$$

- $K_{C,T}$ (m^2s^{-1}) est le coefficient de *diffusion turbulente*
- On a certainement $K_{C,T} \sim \nu_T$ (diffusion exercée par les tourbillons)

$$K_{C,T} \approx \frac{\nu_T}{\sigma_C} \quad \text{où } \sigma_C \text{ est le nombre de Schmidt } (\sim 1)$$

Modèle $k-L_m$



Retour à l'équation sur k (L. Prandtl, 1945)

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial k}{\partial x_j} u_j}_{\text{Convection}} = \underbrace{P}_{\text{Production}} + \underbrace{\frac{\partial Q_j^k}{\partial x_j}}_{\text{Diffusion}} - \underbrace{\varepsilon}_{\text{Dissipation}} \quad P = \nu_T S^2$$

C'est finalement l'équation d'un traceur !

Le modèle précédent pour la diffusion turbulente donne :

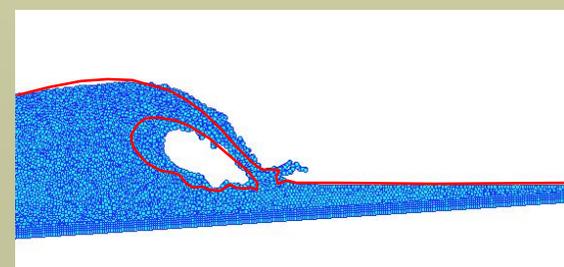
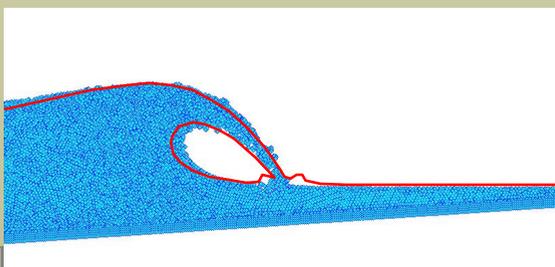
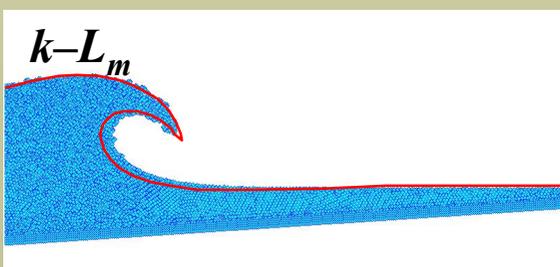
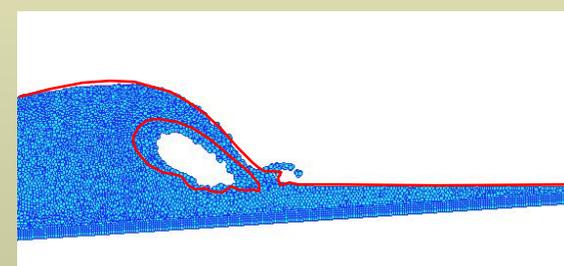
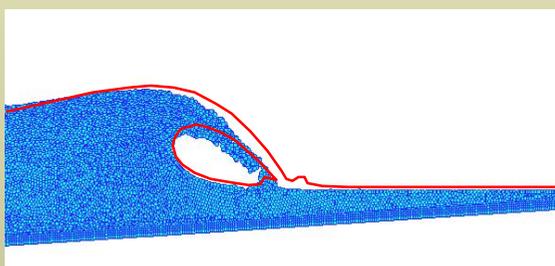
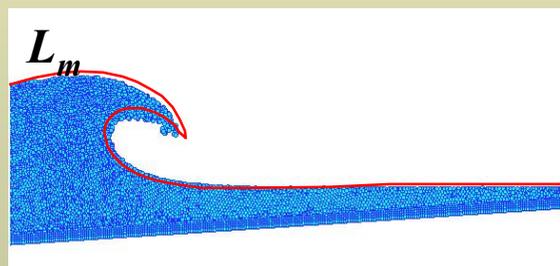
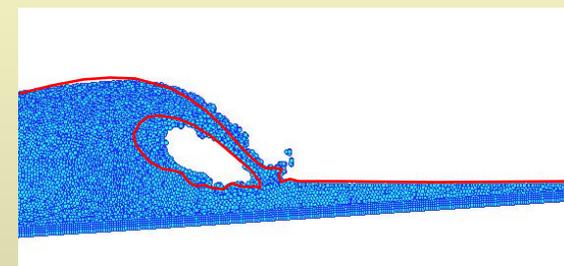
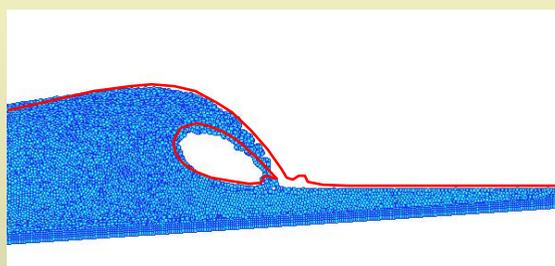
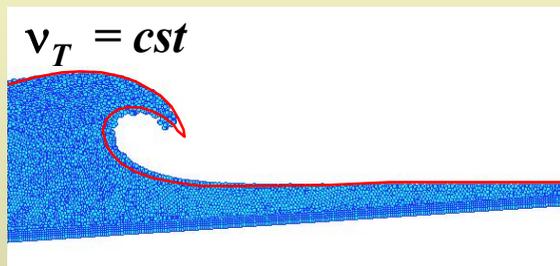
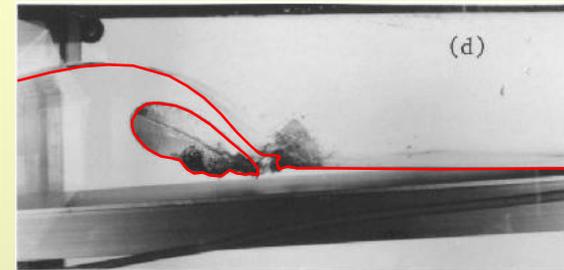
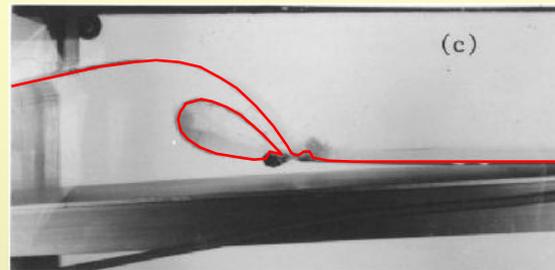
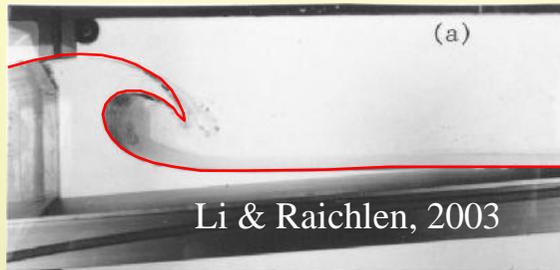
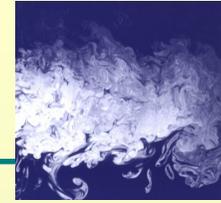
$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k}{\partial x_j} u_j = \nu_T S^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \varepsilon \quad \sigma_k \approx 1,0$$

Estimation de ν_T et ε

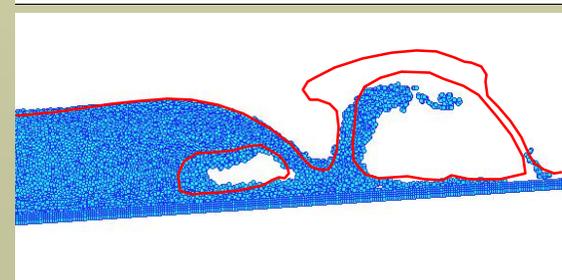
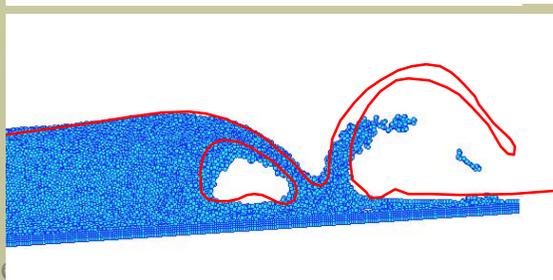
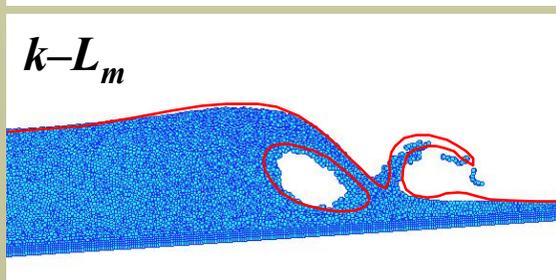
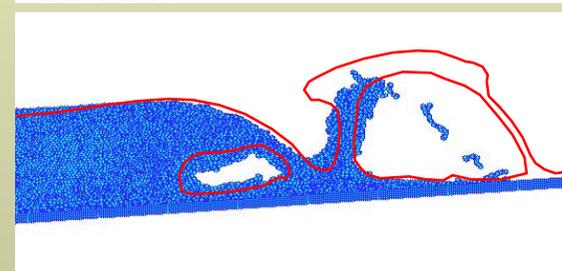
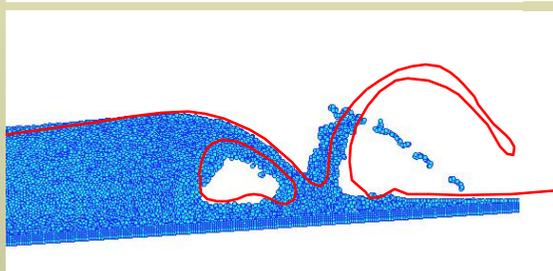
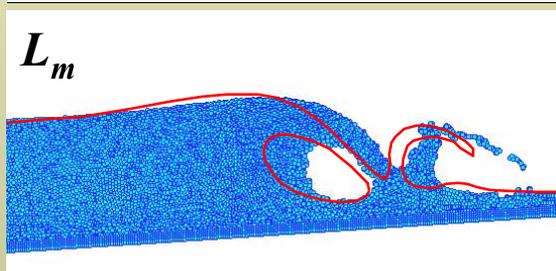
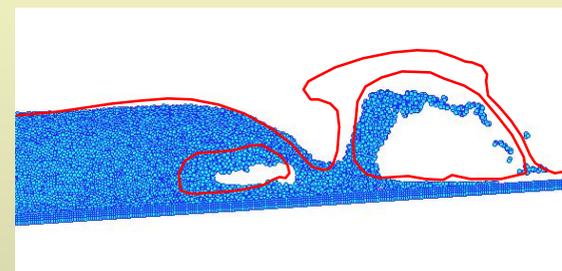
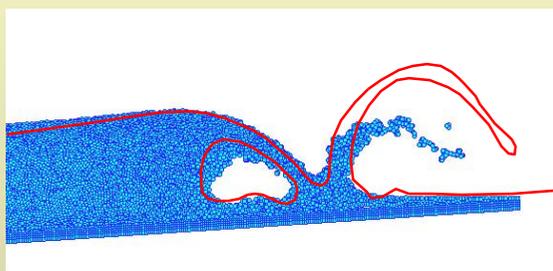
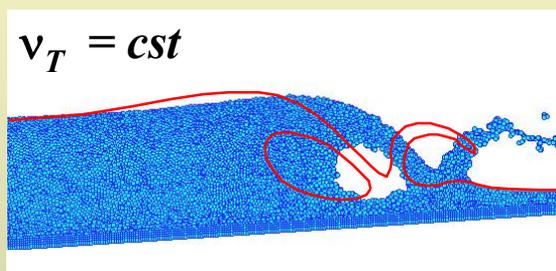
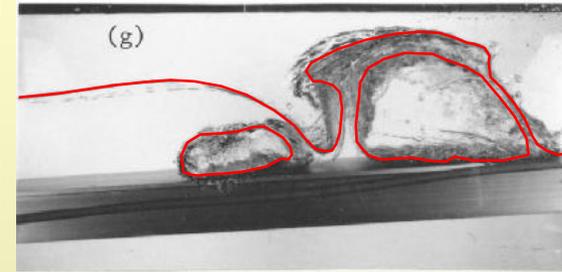
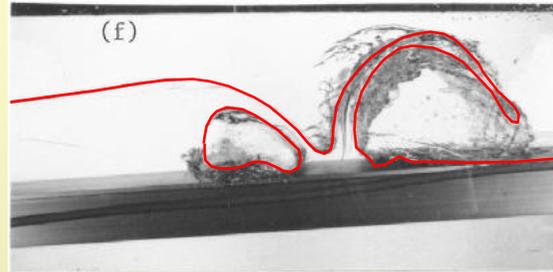
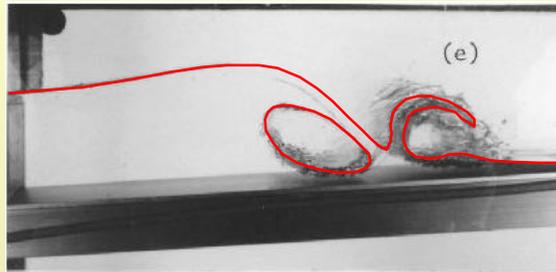
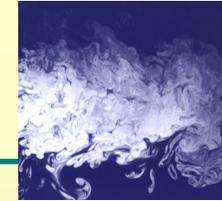
On utilise le modèle de longueur de mélange :

$$\begin{aligned} \nu_T &= L_m^2 S \\ \varepsilon &\approx P = \nu_T S^2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \nu_T^3 = L_m^4 \varepsilon \quad \nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \varepsilon = C_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{L_m} \\ \nu_T = C_\mu^{1/4} k^{1/2} L_m \end{cases}$$

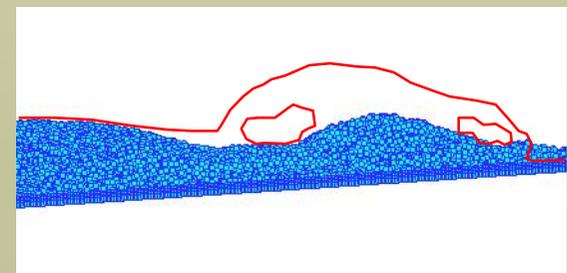
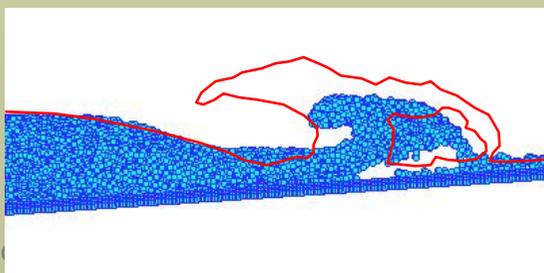
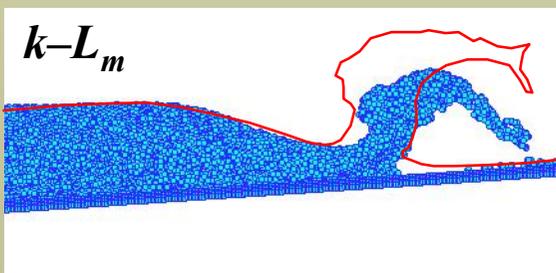
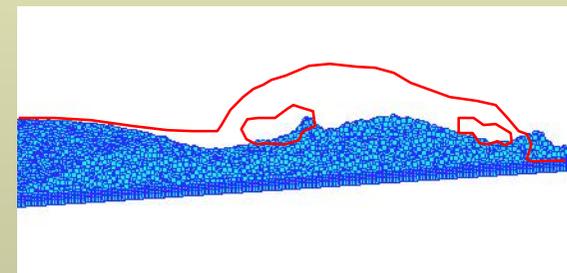
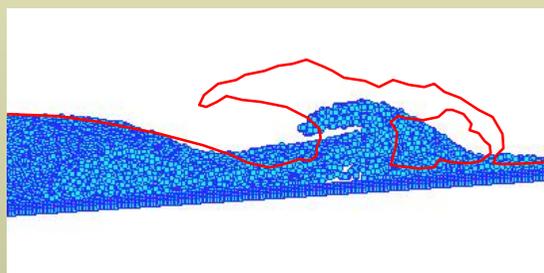
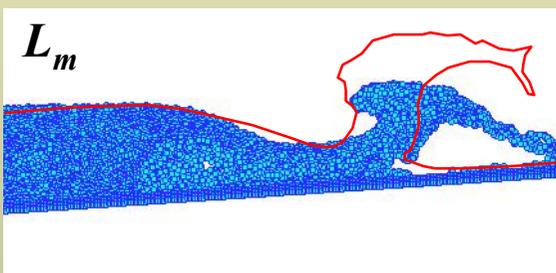
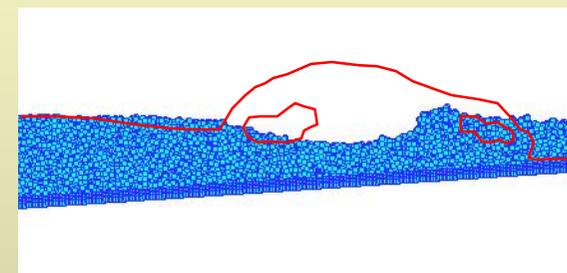
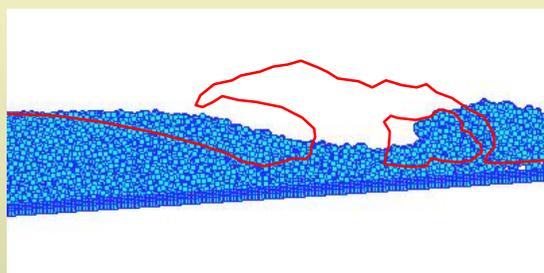
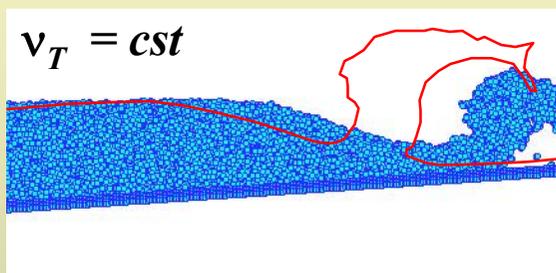
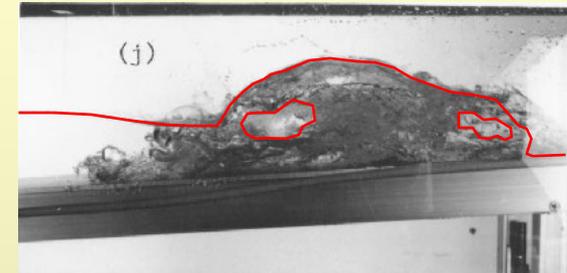
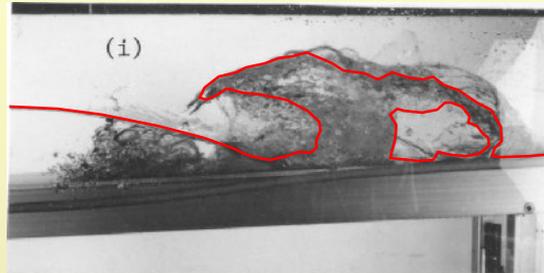
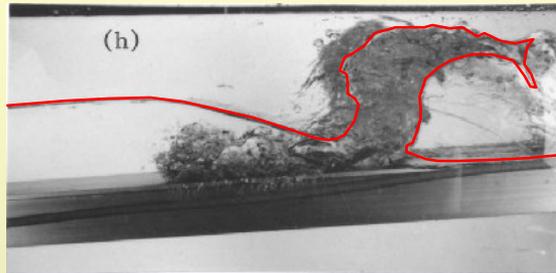
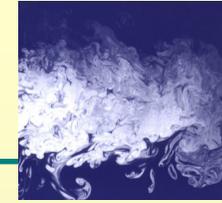
Comparaison entre modèles (1)



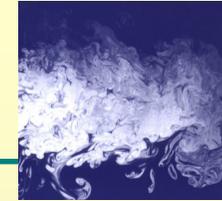
Comparaison entre modèles (2)



Comparaison entre modèles (3)



Modèle $k-\varepsilon$



Equation de ε

Il s'agit, pour mieux estimer ε , d'écrire une équation semblable :

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k}{\partial x_j} u_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P - \varepsilon \quad P = \nu_T S^2$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} u_j = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P - C_{\varepsilon 2} \varepsilon) \quad \nu_T = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

Constantes du modèle

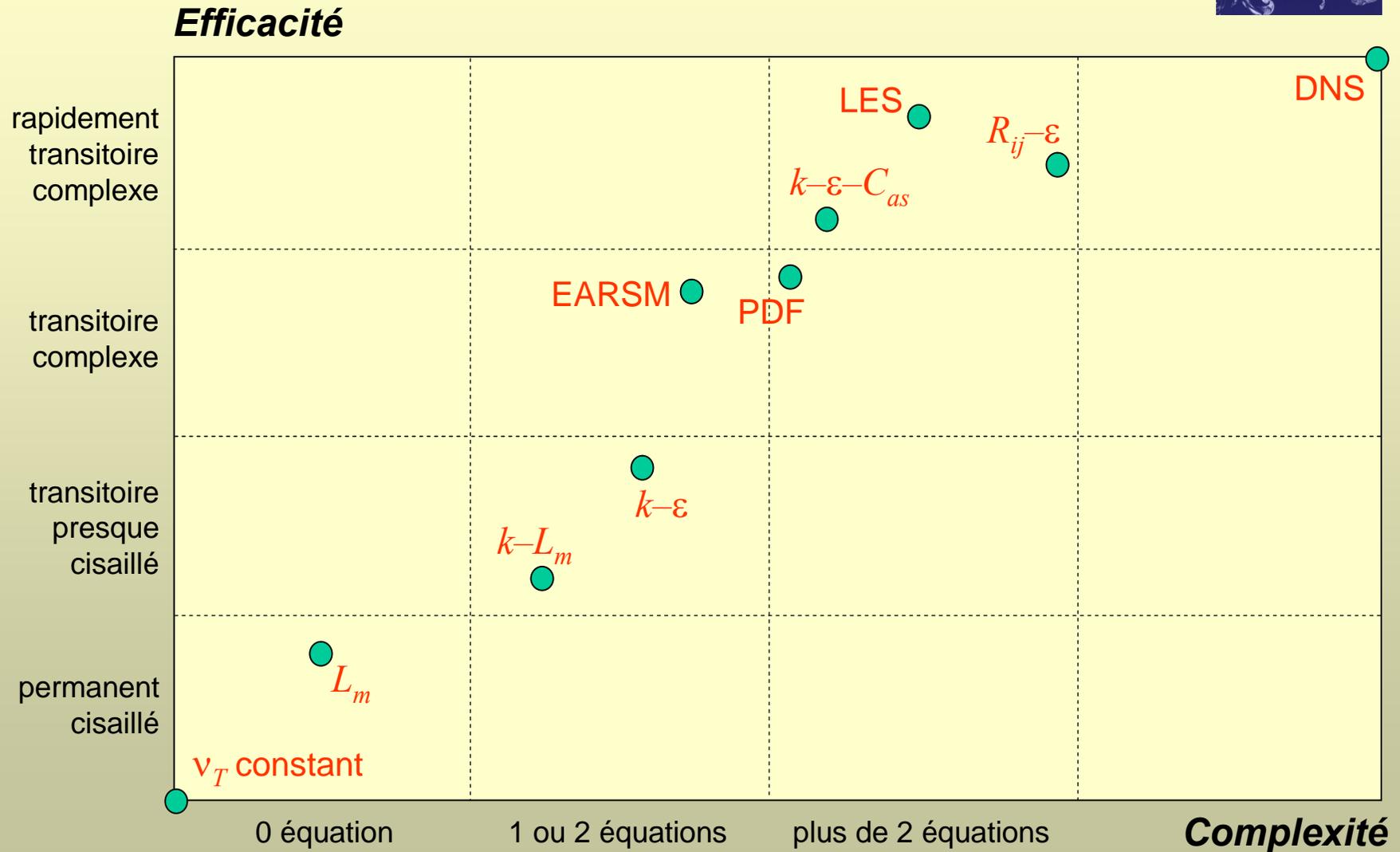
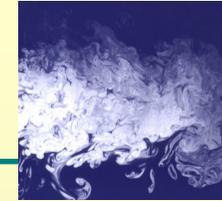
On utilise fréquemment le jeu de constantes suivant :
(Launder & Spalding, 1974)

$$\sigma_k = 1,0 \quad C_{\varepsilon 1} = 1,44 \quad C_\mu = 0,09$$

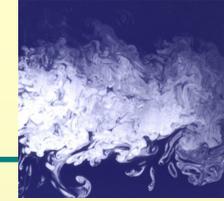
$$\sigma_\varepsilon = 1,3 \quad C_{\varepsilon 2} = 1,92$$

- Plus besoin de L_m
- Modèle précis, non permanent
- C.L. sur k et ε ?

Panorama des modèles existants



Conclusion de la 3^{ème} partie



Bilan des connaissances

La structure de la turbulence est éclaircie :

- Les **gradients de vitesse moyenne** produisent des grands tourbillons en leur cédant de l'énergie
- Le terme de **convection** disloque les tourbillons en une suite de structures de plus en plus petites (cascade d'énergie)
- La **viscosité** cinématique arrête ce processus à l'échelle des petits tourbillons
- Entre grands et petits tourbillons, existe une **gamme continue** de structures présentant une invariance d'échelle (→ modèles réduits !)
- Les grands tourbillons exercent une **diffusion turbulente**
- L'effet dissipatif des petits tourbillons est repris (artificiellement) à l'échelle de l'écoulement moyen par le *modèle* de **viscosité turbulente**
- Plusieurs **modèles** existent pour estimer cette viscosité : longueur de mélange, modèle en k , modèle $k-\varepsilon$, etc.

Merci de votre attention.